*Postverlagsort Berlin*

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

**E. KAMKE** TÜBINGEN
**R. NEVANLINNA** HELSINKI
**F. K. SCHMIDT** HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

**H. WIELANDT**
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

75. BAND, 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 20. MÄRZ 1961)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1961

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

---

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole $o$ und $O$, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

**E. Kamke,** Tübingen, Frischlinstraße 27,
**R. Nevanlinna,** Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.
**F. K. Schmidt,** Heidelberg, Mathematisches Institut,
**H. Wielandt,** Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

**Springer-Verlag OHG**

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83319
Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723
Göttingen, Weender Straße 60.

---

75. Band — **Inhalt** — 4. Heft

Seite

Tôgô, Sh., On linear groups in which all elements can be decomposed in Jordan products . . . . . 305
Guha, U. C., Rearrangements of the coefficients of a Power series . . . . . 325
Wolfson, K. G., Baer subrings of the ring of linear transformations . . . . . 328
Baer, R., Partitionen endlicher Gruppen . . . . . 333
Kegel, O. H., Die Nilpotenz der $H_p$-Gruppen . . . . . 373
Schoch, M., Integration einer Klasse linearer Differentialgleichungen . . . . . 377
Shah, S. M., On Exceptional Values and the Genus of a meromorphic Function . . 385
Tschauner, J., Erzeugende Funktionen von Besselschen Funktionen . . . . . 392

Tôgô, Sh.
Math. Zeitschr. 75, 305–324 (1961)

# On linear groups in which all elements can be decomposed in Jordan products

By
Shigeaki Tôgô[1])

## 1. Introduction

Let $k$ be an algebraically closed field of arbitrary characteristic and let $GL(n, k)$ be the group of all automorphisms of an $n$-dimensional vector space $V$ over $k$. The elements of $GL(n, k)$ are considered as the non-singular square matrices of degree $n$ with coefficients in $k$. An element $x$ of $GL(n, k)$ is uniquely expressed as $x = x_s x_u$ in such a way that $x_s$ is a semisimple matrix, $x_u$ is a unipotent matrix and $x_s x_u = x_u x_s$ [2, p. 71 and p. 184]. $x_s x_u$ is called the Jordan product decomposition of $x$ and $x_s$, $x_u$ are called the semisimple and unipotent parts of $x$ respectively. We called [5] a subgroup $G$ of $GL(n, k)$ *splittable* provided the semisimple and unipotent parts of every element of $G$ also belong to $G$, on the analogy of the definition of splittable linear Lie algebras by A. Malcev.

Let $M(n, k)$ be the space of all endomorphisms of $V$, which may be considered as the space of all square matrices of degree $n$ with coefficients in $k$. The Zariski topology is defined in $M(n, k)$ by taking the algebraic sets as its closed sets. An algebraic subgroup of $GL(n, k)$ is a subgroup of $GL(n, k)$ which is the intersection of $GL(n, k)$ and an algebraic set of $M(n, k)$. However, as was indicated in [1, (2.1)], an algebraic subgroup of $GL(n, k)$ can be defined as an algebraic set by imbedding $GL(n, k)$ into $M(n+1, k)$ suitably. We consider $GL(n, k)$ with the Zariski topology defined in this way. We shall denote by $G^*$ the closure of a subgroup $G$ of $GL(n, k)$, which is known to be the smallest algebraic subgroup of $GL(n, k)$ containing $G$.

A subgroup $G$ of $GL(n, k)$ is called [6, Definitions 4.1 and 6.2] a $D^\infty$-*group* (resp. $C^\infty$-*group*) provided it satisfies the following condition:

$(D^\infty)$ $\qquad D^\infty G^* < G$

(resp. $(C^\infty)$ $\qquad C^\infty G^* < G$),

where $D^\infty G^*$ (resp. $C^\infty G^*$) is the intersection of all members of the derived series $D^i G^*$ (resp. the descending central series $C^i G^*$) of a group $G^*$. A $D^\infty$-subgroup (resp. $C^\infty$-subgroup) of $GL(n, k)$ is called [6, Definitions 7.2 and 11.1] an $SD^\infty$-*group* (resp. $SC^\infty$-*group*) provided all the maximal solvable connected subgroups $R$ satisfy the following condition:

$(S)$ For any maximal torus $T$ of $R$, $R$ is the semi-direct product of $T$ and the invariant subgroup consisting of all unipotent elements of $R$,

[1]) Research done while the author was in Northwestern University with the support of the National Science Foundation, U.S.A.

where we mean by a *torus* a connected commutative group consisting of semisimple matrices.

In [6], by making use of the results of A. BOREL and C. CHEVALLEY on algebraic linear groups, we developed the properties of more general classes of linear groups, i.e., the properties of $D^\infty$-subgroups, which are, roughly speaking, the groups different from algebraic groups on their solvable parts, $SD^\infty$-subgroups, $C^\infty$-subgroups and $SC^\infty$-subgroups of $GL(n, k)$. About the connection of the splittability and the $(S)$-property both of which are fundamental properties of algebraic linear groups [1, (9.2) and (12.9)], it is known [6, Theorem 11.4] that a connected $C^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$ is splittable if and only if it is an $SC^\infty$-group. But this can not be expected for $D^\infty$-subgroups of $GL(n, k)$ generally. That is, a connected splittable $D^\infty$-group is not necessarily an $SD^\infty$-group and conversely a connected $SD^\infty$-group is not necessarily splittable (Examples 1 and 2).

The purpose of this paper is to study the properties of splittable $D^\infty$-subgroups of $GL(n, k)$.

It is known [5, Theorem 2] that, for a splittable linear Lie algebra $L$ over a field of characteristic 0, $L$ and the algebraic hull of $L$ have the same nilpotent elements. Some corresponding results on splittable $D^\infty$-subgroups of $GL(n, k)$ will be proved (Theorem 3.2 and Corollary 3.3). As an analogue of a result on a splittable linear Lie algebra [5, Corollary of Theorem 1], we shall prove that a splittable $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$ is algebraic if and only if the radical (resp. a maximal solvable connected subgroup) $N$ is algebraic, and if and only if a maximal torus of $N$ and the invariant subgroup consisting of all unipotent elements of $N$ are algebraic (Theorem 3.4), where the radical is defined as the largest solvable connected invariant subgroup [6, Definition 5.1]. We shall show some necessary and sufficient conditions for a splittable connected $D^\infty$-group to be an $SD^\infty$-group (Theorem 3.10). As a generalization of an important result of A. BOREL on algebraic linear groups [1, (20.8)], we proved [6, Theorem 9.3] that, for a connected splittable $SD^\infty$-group $G$, the centralizer of a maximal torus of $G$ in $G$ is a Cartan subgroup of $G$ and vice versa. We prove the result for connected splittable $D^\infty$-groups satisfying some condition which is weaker than the $(S)$-condition (Theorem 4.8 and Example 1). Furthermore, we shall give a condition under which the splittability and the $(S)$-property coincide for connected $D^\infty$-groups (Theorem 5.1).

## 2. Preliminaries

We recall some fundamental results on connectedness and algebraic closures of a subgroup of $GL(n, k)$ and on $D^\infty$-subgroups of $GL(n, k)$, and note some notations which will be used through the paper.

2.1. *A subgroup $G$ of $GL(n, k)$ has a finite number of connected components, which are the cosets of the connected component of the identity in $G$. $G$ is connected if and only if $G^*$ is connected.*

If $G^*$ is connected, then it is known that $G^*$ is irreducible, whence $G$ is irreducible [3, p. 175]. It follows that $G$ is connected. The converse is evident. The first part is known for algebraic subgroups of $GL(n, k)$. Let $x_i(G^*)_0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ be the cosets of the connected component $(G^*)_0$ of the identity in $G^*$, and put $M_0=G\cap(G^*)_0$ and $M_i=G\cap x_i(G^*)_0$. Then it is clear that $M_0$ is an invariant subgroup of $G$ and that $(M_0)^*=(G^*)_0$, whence $M_0$ is connected by the second part assured above. It is easily seen that $M_i$ is a coset of $M_0$ in $G$ and therefore that $M_i$ is connected, completing the proof.

We always denote by $G_0$ the connected component of the identity in $G$.

2.2. *Let $G$ be a subgroup of $GL(n, k)$ and let $f$ be a rational representation of $G^*$.*

(1) *If $x$ is a semisimple (resp. unipotent) element of $G^*$, then $f(x)$ is a semisimple (resp. unipotent) element of $f(G^*)$; and conversely.*

(2) *If $G$ is splittable, then $f(G)$ is splittable.*

(3) $f(G^*)=f(G)^*$.

(1) is proved in [1, (9.5)]. Therefore we omit the proof. Let $x=x_s x_u$ be the Jordan product decomposition of an element $x$ of $G$. Then it follows from (1) that $f(x_s)=f(x)_s$ and $f(x_u)=f(x)_u$. Therefore (2) is evident. Since $f$ is continuous, we have $f(G^*)\subset f(G)^*$. Since $G^*$ is algebraic, $f(G^*)$ is algebraic by [1, (5.10.4)], whence we have $f(G)^*\subset f(G^*)$ i.e. $f(G^*)=f(G)^*$, completing the proof.

2.3. (1) *A subgroup $G$ of $GL(n, k)$ is solvable (resp. nilpotent, commutative, a torus) if and only if $G^*$ is solvable (resp. nilpotent, commutative, a torus).*

(2) *If $H$ is an invariant subgroup of $G$, then $H^*$ is an invariant subgroup of $G^*$.*

(3) *If $M$, $N$ are subgroups of $GL(n, k)$, and if $M$ centralizes $N$, then $M^*$ centralizes $N^*$.*

If $H$ is an invariant subgroup of $G$, it follows from (2.2) that $x^{-1}H^*x=H^*$ for any $x$ in $G$. Since the normalizer of $H^*$ in $GL(n, k)$ is algebraic, $y^{-1}H^*y=H^*$ for any $y$ in $G^*$, proving (2). Let $H$, $L$ be invariant subgroups of $G$. Let $f$ be a mapping of $GL(n, k)\times GL(n, k)$ to $GL(n, k)$ defined by $f(x, y)=x^{-1}y^{-1}xy$. Then $f^{-1}([H, L]^*)$ is algebraic and contains $H\times L$, whence it contains $H^*\times L^*$ since $H^*\times L^*=(H\times L)^*$. Therefore $[H^*, L^*]\subset[H, L]^*$. Since $H^*$ and $L^*$ are invariant subgroups of $G^*$ by (2), $[H^*, L^*]$ is algebraic [1, (4.9)]. Hence $[H^*, L^*]=[H, L]^*$. The statements on solvability, nilpotency and commutativity in (1) follow from this fact. If $G$ is a torus, $G^*$ is connected commutative by (2.1). Hence the set of all semisimple elements of $G^*$ is an algebraic group [1, (9.2)] and contains $G$, whence it coincides with $G^*$, i.e., $G^*$ is a torus. The converse follows from (2.1). Finally, if $M$ centralizes $N$, $f^{-1}(e)$ ($e$ the identity element of $GL(n, k)$) is algebraic and contains $M\times N$, whence it contains $M^*\times N^*$. Therefore $M^*$ centralizes $N^*$, completing the proof.

2.4. *Let $G$ be a connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$. Then:*

(1) *$G$ has maximal solvable connected subgroups (resp. maximal tori).*

(2) *A maximal solvable connected subgroup of $G$ is the intersection of $G$ and a maximal solvable connected subgroup of $G^*$, and its closure is a maximal solvable connected subgroup of $G^*$; and conversely.*

(3) *Maximal solvable connected subgroups of $G$ are conjugate by inner automorphisms.*

(4) *$G = R(D^\infty G^*)$ for a maximal solvable connected subgroup $R$ of $G$.*

Let $S$ be a maximal solvable connected subgroup of $G^*$. Take a rational representation $f$ of $G^*$ with $D^\infty G^*$ as its kernel [*1*, (5.10.2)]. Then, since $D^\infty G^* = D^m G^*$ for a sufficiently large integer $m$, $f(G^*)$ is solvable connected. By [*1*, (22.3)], $f(S)$ is a maximal solvable connected subgroup of $f(G^*)$, from which it follows that $f(G^*) = f(S)$ and therefore that $G^* = S(D^\infty G^*)$. Since $D^\infty G^*$ is an algebraic subgroup of $G$, we have $G = (G \cap S)(D^\infty G^*)$ and $G^* = (G \cap S)^*(D^\infty G^*)$. It follows that $S = (G \cap S)^*(S \cap D^\infty G^*) = (G \cap S)^*$. By (2.1) $G \cap S$ is connected. If $H$ is a solvable connected subgroup of $G$ containing $G \cap S$, we have $S < H^*$, whence we have $S = H^*$ by (2.3) and the maximality of $S$. Therefore $H < G \cap S$ i.e. $H = G \cap S$. Thus $G \cap S$ is a maximal solvable connected subgroup of $G$. The first part of (1) and the converse part of (2) are proved. The second part of (1) is easily seen by using ZORN's lemma. Let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$ and let $S'$ be a maximal solvable connected subgroup of $G^*$ containing $R$. Then, as above, we see that $G \cap S'$ is connected, $S' = (G \cap S')^*$ and $G = (G \cap S')(D^\infty G^*)$. By the maximality of $R$, we have $R = G \cap S'$, whence $R^* = S'$ and $G = R(D^\infty G^*)$. (4) and the direct part of (2) are proved. By [*1*, (16.10)], maximal solvable connected subgroups of $G^*$ are conjugate under inner automorphisms and therefore, by (4), under the inner automorphisms induced by elements of $D^\infty G^*$. (3) is immediate from this fact and (2). Thus (2.4) is proved.

We note that, by virtue of (3) in (2.4), for a connected $D^\infty$-subgroup $G$ of $GL(n, k)$ to be an $SD^\infty$-group, it suffices to claim that one of the maximal solvable connected subgroups of $G$ has the $(S)$-property.

For our convenience, given a subset $M$ of $GL(n, k)$, we denote by $M^*$ the closure of the group generated by $M$.

For any subgroup $G$ of $GL(n, k)$, the set of all semisimple (resp. unipotent) elements of $G$ is called the semisimple (resp. unipotent) part of $G$ and denoted by $G_s$ (resp. $G_u$).

Given a subset $N$ of $G$, we denote by $\mathfrak{N}(N)$ and $\mathfrak{Z}(N)$ the normalizer and the centralizer of $N$ in $G$ respectively. Their connected components of the identity are called the connected normalizer and the connected centralizer of $M$ in $G$.

## 3. Splittable $D^\infty$-groups

We begin by generalizing [*1*, (19.5)]:

PROPOSITION 3.1. *Let $G$ be a connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$ consisting of semisimple elements. Then $G$ is commutative and $G^*$ consists of semisimple elements.*

Let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$. Then, by (2.4), $R^*$ is a maximal solvable connected subgroup of $G^*$. It follows from LIE-KOLCHIN's theorem that $R^*$ may be triangulated, whence we have $[R, R] \subset R_u$. Since $R_u = e$ ($e$ the identity element of $G$) by our assumption, $R$ is commutative i.e. $R$ is a torus. It follows from (2.3) that $R^*$ is a torus. By using [4, 6—10], we see that $G^*$ is nilpotent and $G^* = R^*$. Thus $G^*$ is a torus and the proposition is proved.

By using Proposition 3.1, we can prove the following

THEOREM 3.2. *Let $G$ be a splittable connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$. Then $(G^*)_u \subset (G_u)^*$ and $(G^*)_s \subset (G_s)^*$.*

Let $H$ be the group generated by the set $G_u$ (resp. $G_s$). Then it follows from (2.2) that $H$ is an invariant subgroup of $G$. By (2) in (2.3), $H^*$ is an invariant subgroup of $G^*$. By [1, (5.10.2)] there exists a rational representation $f$ of $G^*$ with $H^*$ as its kernel. Put $G' = f(G)$. Then $G'$ is a connected $D^\infty$-group. In fact, it is clear that $G'$ is connected. By (2.2) we have $G'^* = f(G^*)$. Therefore, if we take a sufficiently large integer $m$,

$$D^\infty G'^* = D^m G'^* = D^m f(G^*) = f(D^m G^*) = f(D^\infty G^*).$$

Since $G$ is a $D^\infty$-group, it follows that $D^\infty G'^* \subset G'$, whence $G'$ is a connected $D^\infty$-group, as was asserted. By (2.2), $G'$ is splittable and $(G')_u = f(G_u)$ (resp. $(G')_s = f(G_s)$). Since $G_u$ (resp. $G_s$) is contained in the kernel of $f$, we see that $G'$ consists of semisimple (resp. unipotent) elements. Therefore, by Proposition 3.1 (resp. since the fact that a matrix is unipotent can be expressed by the algebraic condition), $G'^*$ consists of semisimple (resp. unipotent) elements. Let $x$ be any element of $(G^*)_u$ (resp. $(G^*)_s$). Then $f(x)$ is a unipotent (resp. semisimple) element of $G'^*$ by (2.2), whence we have $f(x) = e'$ ($e'$ the identity element of $G'$) and therefore $x$ belongs to $H^*$. Thus $(G^*)_u$ (resp. $(G^*)_s$) is contained in $H^*$ and the theorem is proved.

COROLLARY 3.3. *Let $G$ be a splittable connected solvable subgroup of $GL(n, k)$. Then $G_u$ is a connected invariant subgroup of $G$ and $(G^*)_u = (G_u)^*$.*

Since $G^*$ is a solvable connected algebraic subgroup of $GL(n, k)$ by (2.3), $G^*$ may be triangulated by LIE-KOLCHIN's theorem. Therefore we have $[G, G] \subset G_u$, whence $G_u$ is an invariant subgroup of $G$. Since it is known [1, (10.1)] that $(G^*)_u$ is connected and algebraic, we have $(G_u)^* \subset (G^*)_u$. Therefore, it follows from Theorem 3.2 that $(G^*)_u = (G_u)^*$. Further, by (2.1), we see that $G_u$ is connected, completing the proof.

For a $D^\infty$-subgroup $G$ of $GL(n, k)$, the connected component of the identity in the intersection of all maximal solvable connected subgroups of $G$ is the largest solvable connected invariant subgroup of $G$, which we call the *radical* of $G$ [6, Definition 5.1 and Proposition 5.2]. By virtue of Corollary 3.3, we can prove the following

THEOREM 3.4. *Let $G$ be a splittable $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$. Let $R$ and $N$ be respectively a maximal solvable connected subgroup and the radical of $G$. Then the following statements are equivalent:*

(1) *$G$ is algebraic;*

(2) *$R$ is algebraic;*

(3) *$N$ is algebraic;*

(4) *The unipotent part and one of maximal tori of $R$ (resp. $N$) are algebraic.*

Since $D^\infty G_0^* = D^m G_0^*$ for a sufficiently large integer $m$, it follows from (2.1) that $D^\infty G_0^*$ is connected and therefore contained in $G_0$. Therefore $G_0$ is a $D^\infty$-group. $G_0$ is splittable as the intersection of splittable groups $G$ and $(G_0)^*$. It is immediate that $G$ is algebraic if and only if $G_0$ is algebraic and it is clear that $R$, $N$ are a maximal solvable connected subgroup and the radical of $G_0$. Therefore it suffices to prove the theorem when $G$ is connected.

It is evident that (1) implies (2) and (3). By (2.4) it is immediate that (2) implies (1). To see that (3) implies (1), it suffices to show that $G = N(D^\infty G^*)$. Let $M$ be the radical of $G^*$ and let $f$ be a rational representation of $G^*$ with $M$ as its kernel. Then

$$f(D^\infty G^*) = f(D^m G^*) = D^m f(G^*)$$

for a sufficiently large integer $m$. Since the radical of $f(G^*)$ is $e$, i.e., $f(G^*)$ is semisimple, it follows from [4, 16—06] that $f(D^\infty G^*) = f(G^*)$. Therefore $G^* = M(D^\infty G^*)$. Since $D^\infty G^* \subset G$, we see that $G = (G \cap M)(D^\infty G^*)$ and therefore that $G^* = (G \cap M)^*(D^\infty G^*)$, whence $M = (G \cap M)^*$. Thus $G \cap M$ is a connected invariant subgroup of $G$. Since $N^* \subset M$ by (2.1) and (2.3), it follows that $N \subset G \cap M$ i.e. that $N = G \cap M$. Thus we have $G = N(D^\infty G^*)$, as was desired.

Furthermore, it is evident that (2) (resp. (3)) implies the first (resp. second) part of (4). We here assert that $R$ and $N$ are splittable. In fact, since $G$ is splittable, the group generated by the semisimple and unipotent parts of all elements of $R$ is a subgroup of $G$. Since its closure is equal to $R^*$, it is solvable and connected by (2.1) and (2.3). Therefore, by the maximality of $R$, it coincides with $R$. This shows that $R$ is splittable. The intersection of all maximal solvable connected subgroups of $G$ is therefore splittable. As its connected component of the identity, $N$ is splittable, as was asserted. Suppose that the unipotent part $R_u$ and a maximal torus $T$ of $R$ are algebraic. Then it follows from Corollary 3.3 that

$$R_u = (R_u)^* = (R^*)_u.$$

Let $Q$ be a maximal torus of $R^*$ containing $T$. Then, by the structure theorem of solvable connected algebraic groups, we have

$$R^* = Q(R^*)_u = Q R_u,$$

from which it follows that $R = (R \cap Q) R_u$ and therefore that $R^* = (R \cap Q)^* R_u$. Since $Q$ contains $(R \cap Q)^*$, we have

$$Q = (R \cap Q)^*(R_u \cap Q) = (R \cap Q)^*.$$

Therefore $R \cap Q$ is connected by (2.1). Since $T \subset R \cap Q$, it follows from the maximality of $T$ that $T = R \cap Q$ and therefore that $R = T R_u$. Thus we see

that $R$ is algebraic. This proves that the first part of (4) implies (2). We can similarly prove that the second part of (4) implies (3). The proof is complete.

Before we state some necessary and sufficient conditions for a splittable $D^\infty$-group to be an $SD^\infty$-group, we shall prove several lemmas.

LEMMA 3.5. *Let $G$ be a connected algebraic subgroup of $GL(n, k)$ and let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$. Then we have*

$$C^\infty G = (C^\infty R)(D^\infty G) \quad \text{and} \quad G_u < R_u(DG).$$

To prove that $C^\infty G = (C^\infty R)(D^\infty G)$, it suffices to show that

$$(1)_p \qquad C^p G = (C^p R)(D^\infty G),$$

since $C^\infty G = C^q G$ and $C^\infty R = C^q R$ for a sufficiently large integer $q$. By (2.4) we see that $G = R(D^\infty G)$, whence we have $(1)_0$. Assume now that the formula $(1)_p$ is true. Given any $g$ in $G$ and $h$ in $C^p G$, we have

$$g = x\,u \quad \text{with } x \text{ in } R \text{ and } u \text{ in } D^\infty G,$$
$$h = y\,v \quad \text{with } y \text{ in } C^p R \text{ and } v \text{ in } D^\infty G.$$

Hence

$$\begin{aligned} g\,h\,g^{-1}h^{-1} &= (x\,u)(y\,v)(x\,u)^{-1}(y\,v)^{-1} \\ &= (x\,y\,x^{-1}y^{-1})\left((y\,x^{-1}y^{-1})^{-1}u\,(y\,x^{-1}y^{-1})\right)\left((y\,x)\,v\,u^{-1}(y\,x)^{-1}\right)(y\,v^{-1}y^{-1}), \end{aligned}$$

from which it follows that $g\,h\,g^{-1}h^{-1}$ belongs to a group $(C^{p+1}R)(D^\infty G)$. Therefore we have $C^{p+1}G < (C^{p+1}R)(D^\infty G)$. The converse inclusion is evident and we have the formula $(1)_{p+1}$, which is to be shown.

To prove that $G_u < R_u(D^\infty G)$, take a rational representation $f$ of $G$ with $D^\infty G$ as its kernel. Since $G = R(D^\infty G)$ by (2.4), we have $f(G) = f(R)$. Given an element $x$ of $G_u$, $f(x)$ belongs to $f(R)_u = f(R_u)$, whence there exists an element $y$ of $R_u$ such that $f(x) = f(y)$. It shows that $y^{-1}x$ belongs to $D^\infty G$ and therefore that $x$ belongs to $R_u(D^\infty G)$. Thus we have $G_u < R_u(D^\infty G)$. The proof is complete.

LEMMA 3.6. *Let $G$ be a connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$ and let $G_1 = G(C^\infty G^*)$. Then $G_1$ is a connected $D^\infty$-group. A maximal solvable connected subgroup of $G_1$ is $R(C^\infty R^*)$ with $R$ a maximal solvable connected subgroup of $G$, and conversely.*

It is clear that $G_1$ is a group. Since $G_1^* = G^*$, $G_1$ is a connected $D^\infty$-group. Let $R_1$ be a maximal solvable connected subgroup of $G_1$. Then it follows from (2.4) that $R_1^*$ is a maximal solvable connected subgroup of $G^*$ and that $R_1 = G_1 \cap R_1^*$. Put $R' = G \cap R_1$. Then we have

$$R' = G \cap (G_1 \cap R_1^*) = G \cap R_1^*,$$

from which it follows by (2.4) that $R'$ and $R'^*$ are maximal solvable connected subgroups of $G$ and $G^*$ respectively. Therefore, by Lemma 3.5, we have

$$G_1 = G(C^\infty G^*) = R'(D^\infty G^*)(C^\infty R'^*)(D^\infty G^*) = R'(C^\infty R'^*)(D^\infty G^*).$$

Since $C^\infty R_1^* < C^\infty G_1^* = C^\infty G^*$, it follows that $C^\infty R_1^* < G_1$. We assert that $R_1(C^\infty R_1^*)$ is a solvable connected subgroup of $G_1$. In fact, it is clear that $R_1(C^\infty R_1^*)$ is a subgroup of $G_1$. $R_1(C^\infty R_1^*)$ is solvable as a subgroup of a solvable group $R_1^*$. This is connected, as the image of a connected set of a rational mapping $f$ from $R_1^* \times (C^\infty R_1^*)$ to $R_1^*$ which is defined by

$$f(x, y) = x\,y \quad \text{for } x \text{ in } R_1^* \text{ and } y \text{ in } C^\infty R_1^*.$$

Thus the assertion is proved. Therefore, by the maximality of $R_1$, we have $R_1 = R_1(C^\infty R_1^*)$. It follows that $C^\infty R'^* < C^\infty R_1^* < R_1$. Therefore we have

$$R_1 = R'(C^\infty R'^*)\,(R_1 \cap D^\infty G^*) = R'(C^\infty R'^*).$$

Conversely, let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$. Then $R(C^\infty R^*)$ is a solvable connected subgroup of $G_1$, whose proof may be quite similar to the proof of those properties of $R_1(C^\infty R_1^*)$ in the proof of the direct part. Take a maximal solvable connected subgroup $R_2$ of $G_1$ containing $R(C^\infty R^*)$. As in the proof of the direct part, we have $R_2 = R(C^\infty R^*)$. Thus $R(C^\infty R^*)$ is a maximal solvable connected subgroup of $G_1$. The lemma is proved.

LEMMA 3.7. *Let $G$ be a splittable connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$ and let $G_2 = G(G_u)^*$. Then $G_2$ is a connected $D^\infty$-group. A maximal solvable connected subgroup of $G_2$ is $R(R^*)_u$ with $R$ a maximal solvable connected subgroup of $G$, and conversely.*

Let $H$ be the group generated by $G_u$. Then, by (2.2), $H$ is an invariant subgroup of $G$. Therefore $H^*$ is an invariant subgroup of $G^*$, whence $G(G_u)^*$ is a subgroup of $G^*$. Since $G_2^* = G^*$, $G_2$ is a connected $D^\infty$-group. Let $R_1$ be a maximal solvable connected subgroup of $G_2$. It follows from (2.4) that $R_1^*$ is a maximal solvable connected subgroup of $G^*$ and that $R_1 = G_2 \cap R_1^*$. Put $R' = G \cap R_1$. Then

$$R' = G \cap (G_2 \cap R_1^*) = G \cap R_1^*,$$

from which it follows by (2.4) that $R'$ and $R'^*$ are maximal solvable connected subgroups of $G$ and $G^*$ respectively. By Lemma 3.5, we have

$$(G^*)_u < (R'^*)_u\,(D^\infty G^*).$$

Since $(R'^*)_u$ is an algebraic group by [1, (10.1)], $(R'^*)_u(D^\infty G^*)$ is also an algebraic group and therefore contains $(G_u)^*$, whence it coincides with $(G_u)^*$ $(D^\infty G^*)$ by Theorem 3.2. It follows from (2.4) that

$$G_2 = G(G_u)^* = R'(D^\infty G^*)\,(R'^*)_u\,(D^\infty G^*) = R'(R'^*)_u\,(D^\infty G^*).$$

Since $(R_1^*)_u < (G_2^*)_u = (G^*)_u < (G_u)^*$ by Theorem 3.2, it follows that $(R_1^*)_u < G_2$. Since $(R_1^*)_u$ is a connected invariant subgroup of $R_1^*$, $R_1(R_1^*)_u$ is a subgroup of $G_2$. It is also solvable and connected. Its proof is quite similar to the proof of the corresponding fact in the proof of Lemma 3.6. Therefore, by

the maximality of $R_1$, we have $R_1 = R_1(R_1^*)_u$. It follows that $(R'^*)_u \subset (R_1^*)_u \subset R_1$. Therefore we have

$$R_1 = R'(R'^*)_u(R_1 \cap D^\infty G^*) = R'(R'^*)_u.$$

Conversely, let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$. Then $R$ is splittable as was shown in the proof of Theorem 3.4. By Corollary 3.3, we see that $(R^*)_u \subset G_2$. Therefore it is easily seen that $R(R^*)_u$ is a connected solvable subgroup of $G_2$. Take a maximal solvable connected subgroup $R_2$ of $G_2$ containing $R(R^*)_u$. As in the proof of the direct part, we have $R_2 = R(R^*)_u$, which shows that $R(R^*)_u$ is a maximal solvable connected subgroup of $G_2$. The proof is complete.

LEMMA 3.8. *Let $H = MN$ be a subgroup of $GL(n, k)$ such that $M$ is a subgroup of $H$ and such that $N$ is an algebraic invariant subgroup of $H$. If $M$ is splittable, then $H$ is splittable.*

It is clear that $N$ is an invariant subgroup of $H^*$. Take a rational representation $f$ of $H^*$ with $N$ as its kernel [1, (5.10.2)]. Then $f(H) = f(M)$. Therefore, given an element $x$ of $H$, there exists an element $y$ of $M$ such that $f(x) = f(y)$. Since, by (2.2),

$$f(x) = f(x_s)f(x_u) = f(x)_s f(x)_u$$

and

$$f(y) = f(y_s)f(y_u) = f(y)_s f(y)_u$$

are the Jordan product decompositions of $f(x)$ and $f(y)$ respectively, it follows that $f(x_s) = f(y_s)$, whence $x_s = y_s z$ with $z$ in $N$. Since $M$ is splittable by our assumption, $y_s$ belongs to $M$ and therefore that $x_s$ belongs to $H$. Thus $H$ is splittable, completing the proof.

LEMMA 3.9. *Let $G$ be a splittable connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$. Let $G_1$ and $G_2$ be the groups defined in Lemmas 3.6 and 3.7 respectively. Then $G_1$ and $G_2$ are connected $SC^\infty$-groups, and $G_1 \subset G_2$.*

Let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$. Put $R_1 = R(C^\infty R^*)$ and $R_2 = R(R^*)_u$. Since $R^*$ may be triangulated, it follows that $C^\infty R^* \subset (R^*)_u$ and therefore that $R_1 \subset R_2$. By Lemmas 3.6 and 3.7, $R_1$ and $R_2$ are maximal solvable connected subgroups of connected $D^\infty$-groups $G_1$ and $G_2$ respectively. Therefore, by (2.4), we have $G_1 = R_1(D^\infty G^*)$ and $G_2 = R_2(D^\infty G^*)$, from which it follows that $G_1 \subset G_2$. It is clear that $G_1$ and $R_1$ are connected $C^\infty$-groups and therefore that $G_2$ and $R_2$ are also connected $C^\infty$-groups. Since $G$ is splittable, we see that $R$ is splittable, by considering the group generated by the semisimple and unipotent parts of all elements of $R$. By using Lemma 3.8, we see that $R_1$ and $R_2$ are splittable, and therefore that $G_1$ and $G_2$ are splittable. We now use [6, Theorem 11.4] to conclude that $G_1$ and $G_2$ are connected $SC^\infty$-groups.

We are now in a position to prove the following

THEOREM 3.10. *Let $G$ be a splittable connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$. Let $G_1 = G(C^\infty G^*)$ and $G_2 = G(G_u)^*$. Then $G_1$ and $G_2$ are connected $SC^\infty$-groups. And the following statements are equivalent:*

(1) *$G$ is an $SD^\infty$-group;*

(2) *Any maximal torus of a maximal solvable connected subgroup of $G$ is a maximal torus of $G_1$;*

(3) *Any maximal torus of a maximal solvable connected subgroup of $G$ is a maximal torus of $G_2$.*

By Lemma 3.9, $G_1$ and $G_2$ are connected $SC^\infty$-groups. We note that, if (2) (resp. (3)) is true, then (2) (resp. (3)) is also true for all maximal solvable connected subgroups of $G$, which is an immediate consequence of (3) in (2.4).

(1)$\rightarrow$(3). Let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$ and let $T$ be a maximal torus of $R$. Then $R=TR_u$ since $G$ is an $SD^\infty$-group by our assumption. Put $R_2=R(R^*)_u$. Then, by Lemma 3.7, $R_2$ is a maximal solvable connected subgroup of $G_2$ and we have

$$R_2=(TR_u)(R^*)_u=T(R^*)_u=T(R_2^*)_u.$$

It follows that $T$ is a maximal torus of $R_2$. Since $(R_2^*)_u$ is algebraic, we have $R_2^*=T^*(R_2^*)_u$, from which it follows that $T^*$ is a maximal torus of $R_2^*$. Since $R_2^*$ is maximal solvable connected in $G_2^*$ by (2.4), it follows from [1, (16.10)] that $T^*$ is a maximal torus of $G_2^*$. Since $T<R_2\cap T^*$, we see that $T^*<(R_2\cap T^*)^*<T^*$ i.e. that $(R_2\cap T^*)^*=T^*$. By (2.1) $R_2\cap T^*$ is connected, whence $R_2\cap T^*=T$ by the maximality of $T$. Let $T_2$ be any maximal torus of $G_2$ containing $T$. Then $T_2^*$ is a torus of $G_2^*$ and contains $T^*$, whence we have $T_2^*=T^*$. It follows from (2.4) that

$$T_2<G_2\cap T^*=G_2\cap R_2^*\cap T^*=R_2\cap T^*=T.$$

Therefore $T_2=T$ i.e. $T$ is a maximal torus of $G_2$.

(3)$\rightarrow$(2) is immediate from the remark in the begining of the proof, since we have $G_1<G_2$ by Lemma 3.9.

(2)$\rightarrow$(1). Let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$ satisfying (2) and let $T$ be any maximal torus of $R$. Put $R_1=R(C^\infty R^*)$. Then $R_1$ is a maximal solvable connected subgroup of $G_1$ by Lemma 3.6 and has the $(S)$-property by Lemma 3.9. Since $T$ is a maximal torus of $R_1$ by our assumption, we have $R_1=T(R_1)_u$, from which it follows that

$$R=T\big(R\cap(R_1)_u\big)=TR_u.$$

Thus $R$ has the $(S)$-property. By the remark after (2.4), $G$ is an $SD^\infty$-group. This completes the proof.

## 4. A type of splittable $D^\infty$-groups

To develop more properties of splittable $D^\infty$-subgroups of $GL(n, k)$, we consider the following condition for a connected $D^\infty$-group $G$:

(a) *For one of the maximal solvable connected subgroups $R$ of $G$, the closure of any maximal torus of $R$ is a maximal torus of $R^*$.*

It is immediate that any $SD^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$ satisfies this condition, but a splittable $D^\infty$-group satisfying this condition is not necessarily an $SD^\infty$-group as is shown in Example 1. All the theorems and propositions in [6, Part II] can be proved for splittable $D^\infty$-groups satisfying the condition (a). We shall here state some of them.

We begin by proving

LEMMA 4.1. *Let $G$ be a connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$. If $G$ satisfies the condition* (a), *then the closure of any maximal torus of any maximal solvable connected subgroup $R$ of $G$ is a maximal torus of $R^*$.*

Let $R'$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$ satisfying the condition (a). Let $T$ be a maximal torus of $R$. Then, by (2.4), there exists an element $g$ of $G$ such that $R=g^{-1}R'g$. If we write $T'=gTg^{-1}$, then $T'$ is a maximal torus of $R'$ and $T=g^{-1}T'g$. It follows from (2.2) that $R^*=g^{-1}R'^*g$ and $T^*=g^{-1}T'^*g$. Since $T'^*$ is a maximal torus of $R'^*$, it is clear that $T^*$ is a maximal torus of $R^*$, completing the proof.

LEMMA 4.2. *Let $G$ be a splittable connected nilpotent subgroup of $GL(n,k)$. Then $G_s$ is a connected central subgroup, $G_u$ is a connected invariant subgroup of $G$, and $G$ is the direct product of $G_s$ and $G_u$.*

It is known that the statement is true for an algebraic group [1, (11.4)]. The lemma is immediate from this fact, (2.1) and (2.2).

LEMMA 4.3. *Let $G$ be a triangular subgroup of $GL(n, k)$ and let $T$ be a torus in $G$. Then $\mathfrak{Z}(T)=\mathfrak{N}(T)$.*

Let $g$ be an element of $\mathfrak{N}(T)$. For any $x$ in $T$, we put $y=x^{-1}g^{-1}xg$. Then it is clear that $y$ is unipotent. Since $g^{-1}xg$ is in $T$, $y$ is also in $T$, whence $y$ is semisimple. Therefore $y=e$. This shows that $\mathfrak{N}(T)\subset\mathfrak{Z}(T)$. The converse inclusion is evident.

PROPOSITION 4.4. *Let $G$ be a connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$ satisfying the condition* (a). *Then a maximal torus of $G$ is the intersection of $G$ and a maximal torus of $G^*$, and its closure is a maximal torus of $G^*$. A maximal torus of a maximal solvable connected subgroup of $G$ is a maximal torus of $G$.*

Let $T$ be a maximal torus of $G$. Take a maximal solvable connected subgroup $R$ of $G$ containing $T$. By Lemma 4.1, $T^*$ is a maximal torus of $R^*$. Since $R^*$ is a maximal solvable connected subgroup of $G^*$ by (2.4), $T^*$ is a maximal torus of $G^*$ [1, (16.10)]. Since $T^*=(G\cap T^*)^*$, $G\cap T^*$ is connected by (2.1). Therefore, by the maximality of $T$, we have $T=G\cap T^*$, proving the first part. Let $T_1$ be a maximal torus of a maximal solvable connected subgroup $R$ of $G$. Then, by (2.4) and Lemma 4.1, $T_1^*$ is a maximal torus of $G^*$. By (2.4) and the first part, we have

$$G\cap T_1^*=G\cap R^*\cap T_1^*=R\cap T_1^*=T_1.$$

If $T'$ is a torus of $G$ containing $T_1$, then $T'^*=T_1^*$ and therefore $T'\subset G\cap T_1^*=T_1$ i.e. $T'=T_1$. Thus $T_1$ is a maximal torus of $G$.

PROPOSITION 4.5. *Let $G$ be a connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$ satisfying the condition* (a). *Let $T$ and $R$ be respectively a maximal torus and a maximal solvable connected subgroup of $G$. Then the following statements are equivalent:*

(1) *$G$ has a unique maximal torus;*
(2) *$T$ is contained in the center of $G$;*
(3) *$G$ is nilpotent;*
(4) *$R$ is nilpotent.*

Suppose that $G$ has a unique maximal torus $T$. By (3) in (2.4), it is immediate that $T \subset R$. Since $R \subset \mathfrak{N}(T)$, it follows from Lemma 4.3 that $R \subset \mathfrak{Z}(T)$. By (2.3) we see that $R^*$ centralizes $T^*$. Since $T^*$ is a maximal torus of $R^*$ by Lemma 4.1, it follows from the $(S)$-property of solvable connected algebraic groups that $R^*$ is the direct product of $T^*$ and $(R^*)_u$. Thus $R^*$ is nilpotent, whence $R$ is nilpotent, proving that (1) implies (4).

By (2.4) and [*4*, 6—10], it is immediate that (4) implies (3). By (2.3) and Lemma 4.2, it is clear that (3) implies (2).

Assume now (2) and let $T'$ be any maximal torus of $G$. Let $R'$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$ containing $T'$. Then, by Proposition 4.4, $T'^*$ and $T^*$ are maximal tori of $G^*$, $T = G \cap T^*$ and $T' = G \cap T'^*$. By the conjugation theorem [*1*, (16.10)], there exists an element $g$ of $G^*$ such that $T'^* = g^{-1} T^* g$. Since $T^*$ is centralized by $G^*$ by (2.3), we have $T'^* = T^*$, whence $T' = T$. Thus (2) implies (1). The proof is complete.

LEMMA 4.6. *Let $G$ be a nilpotent subgroup of $GL(n, k)$. Then all the semisimple elements of $G_0$ belong to the center of $G$.*

By (2.3), $G^*$ is nilpotent. All semisimple elements of $(G^*)_0$ belong to the center of $G^*$ [*1*, (11.9)]. Since $G_0 \subset (G^*)_0$, it follows that all semisimple elements of $G_0$ belong to the center of $G$.

LEMMA 4.7. *Let $G$ be a connected nilpotent subgroup of $GL(n, k)$ and let $H$ be a connected proper subgroup of $G$. Then $H$ is properly contained in its connected normalizer in $G$.*

If $G$ is commutative or if $H$ does not contain the connected component of the identity of the center $Z(G)$ of $G$, the lemma is clearly true. If $Z(G)_0 \subset H$, we can prove the lemma by induction on the smallest integer $m$ such that $C^m G = e$ and by considering a rational representation of $G^*$ with the closure of $Z(G)_0$ as its kernel. We omit the proof (cf. [*6*, Lemma 9.2]).

Before we state the theorem generalizing [*1*, (20.8) and *6*, Theorem 9.3], we recall the definition of Cartan subgroups of a subgroup $G$ of $GL(n, k)$.

A subgroup $H$ of $G$ is called a *Cartan subgroup* of $G$ provided $H$ is maximal nilpotent and any subgroup of finite index of $H$ is of finite index in its normalizer [*3*, p. 199]. It is easy to see that the second condition can be replaced by the following condition: $H_0$ is equal to its connected normalizer.

THEOREM 4.8. *Let $G$ be a splittable connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$ satisfying the condition* (a). *Then the centralizer of a maximal torus of $G$ is a Cartan subgroup of $G$, and conversely.*

Let $T$ be a maximal torus of $G$. Then, by Lemma 4.1, $T^*$ is a maximal torus of the closure of a maximal solvable connected subgroup of $G$ containing $T$ and therefore, by (2.4) and Proposition 4.4, a maximal torus of $G^*$. It follows from [1, (18.4)] that the centralizer of $T^*$ in $G^*$ is nilpotent. Since $\mathfrak{Z}(T)$ centralizes $T^*$ i.e. $\mathfrak{Z}(T)$ is contained in the centralizer of $T^*$ in $G^*$, we see that $\mathfrak{Z}(T)$ is nilpotent. Suppose that $H$ is a nilpotent subgroup of $G$ containing $\mathfrak{Z}(T)$. Then $T \subset H_0$. It follows from Lemma 4.6 that $T$ is contained in the center of $H$, whence we have $H \subset \mathfrak{Z}(T)$ i.e. $H = \mathfrak{Z}(T)$. Thus $\mathfrak{Z}(T)$ is maximal nilpotent. We assert that $\mathfrak{Z}(T)_0$ is equal to its connected normalizer. Indeed, put $C = \mathfrak{Z}(T)_0$. Then, by (2.3), it is clear that $C \subset G \cap C^* \subset \mathfrak{Z}(T)$. Since $C^*$ is connected and since $(G \cap C^*)^* = C^*$, it follows that $G \cap C^*$ is connected. Therefore we have $C = G \cap C^*$, from which it follows that $C$ is splittable. Thus $C$ is a connected splittable nilpotent group. By Lemma 4.2, $C$ is the direct product of the connected invariant subgroups $C_s$ and $C_u$. Hence $T = C_s$ and therefore $T$ is an invariant subgroup of $\mathfrak{N}(C)$. By using [1, (7.11)], we see that $T$ is contained in the center of $\mathfrak{N}(C)_0$, whence $\mathfrak{N}(C)_0 \subset C$. Therefore we have $\mathfrak{N}(C)_0 = C$, as was asserted. Thus $\mathfrak{Z}(T)$ is a Cartan subgroup of $G$.

Conversely, let $H$ be a Cartan subgroup of $G$. Since $H^*$ is nilpotent by (2.3) and since $H$ is maximal nilpotent, we have $H = G \cap H^*$, whence $H$ is splittable. Then $H_0$ is splittable as the intersection of $H$ and $H_0^*$. Let $S$ be a maximal torus of $H_0$. Then $H_0$ is the direct product of the invariant subgroups $S$ and $(H_0)_u$. Let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$ containing $H_0$, let $T$ be a maximal torus of $R$ containing $S$, and let $M$ be the connected centralizer of $S$ in $TR_u$. Then $T \subset M$. Since $M \subset TR_u \subset R$, it follows that $M = T(M \cap R_u) = TM_u$. And, by Corollary 3.3, $M_u$ is connected. By using Lemma 4.7 and the second condition of Cartan subgroups, we see that $M_u = (H_0)_u$. Since $H_0$ is invariant in $M$, we have $H_0 = M$ and therefore $S = T$. By Proposition 4.4, $S$ is a maximal torus of $G$ and $S^*$ is a maximal torus of $G^*$. It follows that the centralizer of $S^*$ in $G^*$ is nilpotent, whence $\mathfrak{Z}(S)$ is nilpotent as its subgroup. By Lemma 4.6, $S$ is contained in the center of $H$, whence we have $H \subset \mathfrak{Z}(S)$. Since $H$ is maximal nilpotent, we have $H = \mathfrak{Z}(S)$. Thus the theorem is proved.

COROLLARY 4.9. (1) *A Cartan subgroup of $G$ is the intersection of $G$ and a Cartan subgroup of $G^*$, and it is contained in one and only one Cartan subgroup of $G^*$.*

(2) *A Cartan subgroup of a maximal solvable connected subgroup of $G$ is a Cartan subgroup of $G$. Conversely, a Cartan subgroup of $G$ is a Cartan subgroup of any maximal solvable connected subgroup $R$ of $G$ containing its maximal torus $T$ and is the intersection of $R$ and $\mathfrak{N}(T)$.*

Let $T$ be a maximal torus of $G$. Take a maximal solvable connected subgroup $R$ of $G$ containing $T$. Then, by Lemma 4.1, $T^*$ is a maximal torus of $R^*$, from which it follows by (2.4) and Proposition 4.4 that $T^*$ is a maximal torus of $G^*$. It is clear that $\mathfrak{Z}(T)$ is the intersection of $G$ and of the centralizer

of $T^*$ in $G^*$. Therefore the first part of (1) follows from Theorem 4.8. Suppose that $\mathfrak{Z}(T)$ is contained in a Cartan subgroup $C$ of $G^*$. Then we see that $T^* \subset C$ since $C$ is algebraic, and that $T^*$ is a maximal torus of $C$. It is known [1, (18.4)] that $C$ is connected. Therefore, by Lemma 4.2, $C$ is the direct product of $T^*$ and $C_u$, which shows that $C$ is contained in the centralizer of $T^*$ in $G^*$. By the maximality of $C$ and Theorem 4.8, it follows that $C$ is equal to the centralizer of $T^*$ in $G^*$. Thus the second part of (1) is proved by Theorem 4.8.

To prove (2), let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$ and let $T_1$ be a maximal torus of $R$. Then $T_1^*$ is a maximal torus of $R^*$ and therefore of $G^*$. It follows from [1, (18.4)] that the centralizer of $T_1^*$ in $G^*$ is contained in $R^*$. Therefore $\mathfrak{Z}(T_1) \subset G \cap R^* = R$ by (2.4). We have the first part of (2) by Theorem 4.8. Let $H$ be a Cartan subgroup of $G$. Then $H$ is splittable and therefore $H_0$ is also. Hence, by Lemma 4.2, $H$ has a unique maximal torus $T$, from which it follows by Theorem 4.8 that $H = \mathfrak{Z}(T)$ and that $T$ is a maximal torus of $G$. As in the proof of the first part, we see that, if a maximal solvable connected subgroup $R$ of $G$ contains $T$, then $H$ is contained in $R$ and is a Cartan subgroup of $R$. Further, it is immediate from Lemma 4.3 that $\mathfrak{Z}(T) = R \cap \mathfrak{N}(T)$. Thus the proof is complete.

## 5. A theorem on the splittability and the $(S)$-property of $D^\infty$-groups

In this section, we prove a theorem to show that the splittability and the $(S)$-property coincide for connected $D^\infty$-subgroups of $GL(n, k)$ satisfying some condition which is weaker than the $(C^\infty)$-condition.

THEOREM 5.1. *Let $G$ be a connected $D^\infty$-subgroup of $GL(n, k)$ such that $C^\infty G^*$ is contained in the normalizer of $G_s$ in $G^*$. Then $G$ is splittable if and only if it is an $SD^\infty$-group.*

Suppose that $G$ is an $SD^\infty$-group. Then a maximal solvable connected subgroup $R$ of $G$ satisfies the $(S)$-property. Let $x$ be any element of $R$. Then $x_s$ and $x_u$ belong to $G^*$. Take a maximal torus $Q$ of $R^*$ containing $x_s$ by [1, (18.1)]. Then we assert that $Q$ contains a maximal torus $T$ of $R$. In fact, take a maximal torus $T'$ of $R$ and then take a maximal torus $Q'$ of $R^*$ containing $T'$. Then, by the conjugation theorem [1, (12.9)], there exists an element $g$ of $C^\infty R^*$ such that $Q = g^{-1} Q' g$. Put $T = g^{-1} T' g$. Then, from (2.4) and the hypothesis on $G$, it follows that

$$T \subset G_s \cap R^* \subset G \cap R^* = R.$$

Thus $Q$ contains a maximal torus $T$ of $R$, as was asserted. Since $R = TR_u$, we can write

$$x = tu \quad \text{with } t \text{ in } T \text{ and } u \text{ in } R_u.$$

It follows that $t^{-1} x_s = u x_u^{-1}$, which belongs to $Q \cap (R^*)_u$. Therefore $x_s = t$ and $x_u = u$. Thus $x_s$ and $x_u$ belong to $R$, whence $R$ is splittable. We can now use (2.4) and Lemma 3.8 to conclude that $G$ is splittable.

Conversely, suppose that $G$ is splittable. Let $R$ be a maximal solvable connected subgroup of $G$ and let $T$ be a maximal torus of $R$. Then, from the maximality of $R$, it is immediate that $R$ is splittable. Let $x$ be any semi-simple element of $R$. Take a maximal torus $Q$ of $R^*$ containing $T$ and take a maximal torus $Q'$ of $R^*$ containing $x$. By the conjugation theorem there exists an element $g$ of $C^\infty R^*$ such that $Q'=g^{-1}Qg$. By using the hypothesis on $G$, we have $R\cap Q'=g^{-1}(R\cap Q)g$. Since $x$ belongs to $R\cap Q'$, it follows that $x=g^{-1}yg$ with $y$ in $R\cap Q$. Since $R^*$ may be triangulated, we have

$$y^{-1}g^{-1}ygeR\cap C^\infty R^*\subset R\cap(R^*)_u=R_u.$$

Hence $x$ belongs to $(R\cap Q)R_u$. It follows from the splittability of $R$ that $R=(R\cap Q)R_u$. Therefore we have $R^*=(R\cap Q)^*(R^*)_u$ by Corollary 3.3. Since $Q$ contains $(R\cap Q)^*$, it follows that

$$Q=(R\cap Q)^*\big(Q\cap(R^*)_u\big)=(R\cap Q)^*,$$

which shows that $R\cap Q$ is connected i.e. that $R\cap Q$ is a torus of $G$. Therefore $R\cap Q=T$ and $R=TR_u$. Thus $R$ has the $(S)$-property, i.e., $G$ is an $SD^\infty$-group. The proof is complete.

The proof of "only if" part in the theorem gives us a simpler proof of the corresponding part of [6, Theorem 11.4]. We also note that almost all results in [3, Part III] are true for splittable $D^\infty$-subgroups of $GL(n,k)$ satisfying the condition stated in the theorem. But we shall not state them here.

## 6. Examples

EXAMPLE 1. Let $k$ be an algebraically closed field of characteristic 0 containing an element $a$ which is transcendental over the prime field, e.g., the field of complex numbers. Let $\mathbf{Z}$ be the ring of all integers. Let $k_1$ be the subring of $k$ consisting of all finite sums of the elements $a^r$, $r$ in $\mathbf{Z}$, with integral coefficients. Let $G$ denote the set of all matrices $g$ of the following forms:

$$g=\begin{pmatrix}a^r & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{ with } r \text{ in } \mathbf{Z} \text{ and } b \text{ in } k_1.$$

Then $G$ is a subgroup of $GL(2,k)$ and it is clear that $G$ is *splittable*. Since the associated polynomial ideal is prime, $G$ and $G^*$ are *connected*. $G^*$ is the set of all matrices

$$\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{ with } x\ (\neq 0) \text{ and } y \text{ in } k.$$

Let $T$ be a maximal torus of $G$. Let $s$ be the smallest positive integer among the integers $r$ such that $\begin{pmatrix}a^r & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ belongs to $T$, and let $\begin{pmatrix}a^s & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ be an element of $T$. Then, for any element $g=\begin{pmatrix}a^r & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ of $T$, it is immediate that

$r=js$ with some $j$ in $\mathbf{Z}$ and that

$$b=\frac{c}{a^s-1}(a^r-1).$$

Therefore we have

$$g=\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^j.$$

Thus $T$ is the group generated by $\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ with $c$ in $k_1$. If $s>1$, all of this type of subgroups of $G$ are not necessarily maximal tori of $G$. However, if $t$ is a positive integer different from 1 and if $d$ is an element of $k_1$ such that $d$ and $a^t-1$ are relatively prime in $k_1$, then the group $T'$ generated by $\begin{pmatrix} a^t & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is a maximal torus of $G$. In fact, if an element $g=\begin{pmatrix} a^r & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $G$ commutes with $\begin{pmatrix} a^t & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, then we have

$$b=\frac{d}{a^t-1}(a^r-1).$$

Hence $a^r-1$ must be divisible by $a^t-1$ and therefore we have $r=jt$ with some $j$ in $\mathbf{Z}$, from which it follows that

$$g=\begin{pmatrix} a^t & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^j,$$

i.e., that $g$ belongs to $T'$. Thus $T'$ is a maximal torus of $G$.

Since $G_u$ is the set of all matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } b \text{ in } k_1,$$

it is clear that $G \neq T'G$ for a maximal torus $T'$ of $G$ stated above. Therefore *$G$ has not the $(S)$-property.*

A maximal torus of $G^*$ is the subgroup which can be represented as

$$\left\{\begin{pmatrix} x & u(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}:\ x\ (\neq 0)\ \text{variable in } k\right\}$$

with $u$ a fixed element of $k$. Indeed, this type of subgroup of $G$ is clearly a maximal torus of $G^*$. Conversely, a maximal torus of $G^*$ contains an element

$$\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } x' \neq 1$$

and therefore is equal to

$$\left\{\begin{pmatrix} x & \frac{y'}{x'-1}(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}:\ x\ (\neq 0)\ \text{variable in } k\right\}.$$

Further it can be seen immediately that the closure of a maximal torus of $G$ with $\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ as its generator is a special type of maximal torus of $G^*$ with

$$u = \frac{c}{a^s - 1}.$$

Thus $G$ satisfies the condition (a) introduced in Section 4.

In connection with the theorems in Sections 3 and 4, $G$ has the following properties:

(1) $(G^*)_u = (G_u)^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : y \text{ variable in } k \right\}$.

(2) $G$, $G_u$ and all maximal tori of $G$ are not algebraic.

(3) It is immediate that $C^\infty G^* = (G_u)^*$. Therefore the groups $G_1$ and $G_2$ in Theorem 3.10 are

$$\left\{ \begin{pmatrix} a^r & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : r \text{ in } \mathbf{Z} \text{ and } y \text{ in } k \right\}.$$

A maximal torus $T'$ of $G$ mentioned above is not a maximal torus of $G_1$, since the group generated by $\begin{pmatrix} a & \frac{d}{a^l - 1}(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is a torus of $G_1$ containing $T'$ properly.

(4) Let $T$ be a maximal torus of $G$. Let $\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ be the generator of $T$. Then it is immediate that $\mathfrak{N}(T) = \mathfrak{Z}(T)$ and that $\mathfrak{Z}(T)$ contains no unipotent elements. In the case that $s = 1$, any element $\begin{pmatrix} a^r & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $\mathfrak{Z}(T)$ is equal to

$$\begin{pmatrix} a^r & \frac{c}{a-1}(a^r - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^r,$$

whence $\mathfrak{Z}(T) = T$. In the case that $s > 1$, if $\mathfrak{Z}(T) \neq T$, there exists an element $g = \begin{pmatrix} a^r & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $\mathfrak{Z}(T)$ such that $0 < r < s$. The group generated by $g$ and $T$ is a torus and contains $T$ properly, contradicting the maximality of $T$. Thus $\mathfrak{Z}(T) = T$. Let $M$ be a nilpotent subgroup of $G$ containing $T$. Then, by considering the dimension, we see that $(M_0)^* = T^*$, whence $M_0 = T$. Since $M < \mathfrak{N}(T)$, we have $M = T$, which shows that $T$ is maximal nilpotent. Thus $\mathfrak{Z}(T)$ is a Cartan subgroup of $G$.

Conversely, let $H$ be a Cartan subgroup of $G$. Put $S = (H_0)_s$. Since $H_0$ is splittable nilpotent, $S$ is a torus and therefore the group generated by $\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ with $c$ in $k_1$. Then any element of $H_0$ normalizes $S$ and therefore centralizes $S$.

It is immediate that $H_0$ contains no unipotent elements, whence $H_0$ consists of semisimple elements. Therefore $H_0=S$. If a torus of $G$ contains $S$, then it is contained in $\mathfrak{N}(H_0)_0=H_0$ and therefore equal to $S$. Thus $S$ is a maximal torus of $G$. We now have $\mathfrak{N}(S)=\mathfrak{Z}(S)=S$, whence $H=\mathfrak{Z}(S)$.

(5) The converses of Proposition 4.4 and Corollary 4.9 (1) are false for $G$.

EXAMPLE 2. Let $k$ be the field of complex numbers. Let $\boldsymbol{Q}$ be the field of rational numbers and let $\boldsymbol{Z}$ be the ring of all integers. Let $a$ be a positive transcendental number and, for any positive integer $m$, we denote by $a^{1/m}$ its positive $m$-th root. Let $k_1$ be the subring of $k$ consisting of all finite sums with integral coefficients of the elements of the following forms:

$$a^r\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{j_1}(a^{r_1})^i}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{j_n}(a^{r_n})^i}\right)$$

where $r, r_1, \ldots, r_n$ are in $\boldsymbol{Q}$ and $j_1, \ldots, j_n$ in $\boldsymbol{Z}$. Let $G$ denote the set of all matrices $g$ of the following forms:

$$g=\begin{pmatrix} a^r & b & c \\ 0 & a^r & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } r \text{ in } \boldsymbol{Q} \text{ and } b, c, d \text{ in } k_1.$$

Then $G$ is a subgroup of $GL(3, k)$. Since the associated polynomial ideal is prime, $G$ and $G^*$ are *connected*. $G^*$ is the set of all matrices

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } x\ (\neq 0),\ y,\ z \text{ and } u \text{ in } k.$$

It is easy to see that

$$g_s=\begin{pmatrix} a^r & 0 & c-\dfrac{bd}{a^r-1} \\ 0 & a^r & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad g_u=\begin{pmatrix} 1 & ba^{-r} & \dfrac{bda^{-r}}{a^r-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Take $b=d=1$. Then $g_s$ and $g_u$ are not contained in $G$ since $1/(a^r-1)$ does not belong to $k_1$. Therefore $G$ is *not splittable*.

Let $T$ be a maximal torus of $G$. Then it contains an element

$$\begin{pmatrix} a^s & 0 & c \\ 0 & a^s & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } s \neq 0.$$

Let $r$ be any element of $\boldsymbol{Q}$. Then we have $r=p/q$ and $s=l/m$ with $p$, $q$, $l$, $m$ in $\boldsymbol{Z}$ and therefore

$$\frac{a^r-1}{a^s-1}=\frac{\left(a^{\frac{1}{qm}}\right)^{pm}-1}{\left(a^{\frac{1}{qm}}\right)^{ql}-1},$$

from which it follows that

$$\frac{a^r-1}{a^s-1}$$

is in $k_1$. Therefore, we see that $T$ is equal to

$$\left\{\begin{pmatrix} a^r & 0 & \frac{c}{a^s-1}(a^r-1) \\ 0 & a^r & \frac{d}{a^s-1}(a^r-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : r \text{ variable in } \boldsymbol{Q}\right\}.$$

We also see that

$$\begin{pmatrix} a^r & b' & c' \\ 0 & a^r & d' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^r & 0 & \frac{c}{a^s-1}(a^r-1) \\ 0 & a^r & \frac{d}{a^s-1}(a^r-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b'a^{-r} & a^{-r}\left(c'-\frac{c}{a^s-1}(a^r-1)\right) \\ 0 & 1 & a^{-r}\left(d'-\frac{d}{a^s-1}(a^r-1)\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Therefore $G=TG_u$. Thus $G$ *has the* $(S)$*-property.*

A maximal torus of $G^*$ is of the form

$$\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & w(x-1) \\ 0 & x & w'(x-1) \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} : x(\neq 0) \text{ variable in } k\right\}$$

with $w$ and $w'$ fixed elements of $k$. The closure of a maximal torus $T$ of $G$ is a special type of maximal torus of $G^*$ with

$$w=\frac{c}{a^s-1} \quad \text{and} \quad w'=\frac{d}{a^s-1}$$

where $c$ and $d$ are in $k_1$. We see that a maximal torus of $G^*$ does not contain a maximal torus of $G$ generally and therefore that the condition introduced in Theorem 5.1 is not satisfied by $G$.

Example 3. Let $k$, $\boldsymbol{Z}$ and $a$ have the same meaning as in Example 1. Let $k_1$ be the subring of $k$ consisting of all rational functions of $a$ with integral coefficients. We define the group $G$ as in Example 1. Then it is immediate that any maximal torus of $G$ is the group generated by $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ with $b$ in $k_1$. Therefore $G=TG_u$. It is also immediate that $G$ is splittable. Thus $G$ *is a connected splittable group and has the* $(S)$*-property.* As in Example 1,

we see that $G$ has the following properties: The intersection of $G$ and a maximal torus of $G^*$ is not necessarily a maximal torus of $G$, and a maximal torus of $G^*$ is not necessarily the closure of a maximal torus of $G$. Cartan subgroups of $G$ coincide with maximal tori. Therefore the converses of [6, Theorems 8.1 and 9.4] are not true.

## Bibliography

[1] BOREL, A.: Groupes linéaires algébriques. Ann. of Math. **64**, 20—82 (1956).
[2] CHEVALLEY, C.: Théorie des groupes de Lie, Tome II, Groupes algébriques. Paris 1951.
[3] CHEVALLEY, C.: Théorie des groupes de Lie, Tome III, Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie. Paris 1955.
[4] CHEVALLEY, C.: Classification des groupes de Lie algébriques. Séminaire École Normale Supérieure 1956—1958.
[5] TÔGÔ, S.: On splittable linear Lie algebras. J. Sci. Hiroshima University (A) **18**, 289—306 (1955).
[6] TÔGÔ, S.: On splittable linear groups. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **8**, 49—76 (1959).

*Dept. of Math., Hiroshima University, Hiroshima (Japan)*

*(Eingegangen am 26. Januar 1960)*

Guha, U. C.
Math. Zeitschr. 75, 325–327 (1961)

# Rearrangements of the coefficients of a Power series

By

U. C. Guha

1. Let $\pi(n' \to n)$ denote a rearrangement of all non-negative integers by which the integer $n$ is replaced by the integer $n'$. The main object of this paper is to characterise the class of those rearrangements of the coefficients which keep unaltered the radius of convergence of every power series $\sum_0^\infty a_n z^n$. Such a result naturally has a bearing on "rearrangement problems" of Abel summable series.

2. Theorem 1. *A necessary and sufficient condition that a rearrangement $\pi(n' \to n)$ keeps unaltered the radius of convergence of any power series $\sum_0^\infty a_n z^n$ is that $n' = n + o(n)$.*

Proof. Denote the radius of convergence of $\sum_0^\infty a_n z^n$ by $\varrho$ and that of the rearranged series $\sum_0^\infty a_{n'} z^n$ by $\varrho'$, so that $\varrho = 1/\overline{\lim} |a_n|^{1/n}$ and $\varrho' = 1/\overline{\lim} |a_{n'}|^{1/n}$.

Let $n' = n + o(n)$. At first assume that $\varrho$ is not zero or infinity. Taking a sufficiently small positive number $\delta$, we have, for infinitely many $n$,

$$0 < \frac{1}{\varrho} - \delta < |a_n|^{1/n}.$$

Since distinct values of $n$ correspond to distinct values of $n'$ and vice versa, it follows that, for infinitely many $n$,

$$0 < \frac{1}{\varrho} - \delta < |a_{n'}|^{1/n'},$$

so that

$$0 < \left(\frac{1}{\varrho} - \delta\right)^{n'/n} < |a_{n'}|^{1/n}. \tag{1}$$

Let $\varepsilon$ be any given positive number. Remembering that $\frac{n'}{n} = 1 + o(1)$ it follows from (1), $\delta$ being suitably chosen and $n$ sufficiently large, that

$$\frac{1}{\varrho} - \varepsilon < |a_{n'}|^{1/n} \tag{2}$$

for infinitely many $n$.

Again, since $n'$ tends to infinity with $n$, we have, for all sufficiently large $n$, $|a_{n'}|^{1/n'} < \frac{1}{\varrho} + \delta$ so that

$$|a_{n'}|^{1/n} < \left(\frac{1}{\varrho} + \delta\right)^{n'/n}. \tag{3}$$

This gives, with suitably chosen $\delta$,

$$|a_{n'}|^{1/n} < \frac{1}{\varrho} + \varepsilon \tag{4}$$

for all sufficiently large $n$. (2) and (4) together imply that $\overline{\lim}\,|a_{n'}|^{1/n} = \frac{1}{\varrho}$, so that $\varrho' = \varrho$.

Some trivial alterations in the foregoing steps will take care of the cases $\varrho = 0$ and $\varrho = \infty$.

To show that the condition is necessary, take any rearrangement for which $n' \neq n + o(n)$, so that $\left|\frac{n'-n}{n}\right|$ is larger than some positive number $\alpha$ for infinitely many $n$. Suppose that

$$\frac{n'-n}{n} > \alpha \quad \text{when} \quad n = s_1, s_2, \ldots$$

and

$$\frac{n'-n}{n} < -\alpha \quad \text{when} \quad n = t_1, t_2, \ldots.$$

**Case 1.** Let the set $S \equiv \{s_1, s_2, \ldots\}$ be an infinite set. Choose a number $R$ greater than unity and define the series $\sum_0^\infty a_n z^n$ by taking

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{R^n} & \text{when} \quad n = s_1', s_2', \ldots, \\ 0 & \text{for other values of } n. \end{cases}$$

Clearly, $\varrho = R$ and $\varrho' = 1/\overline{\lim}\,|a_{n'}|^{1/n}$ $(n \in S)$. Now, when $n \in S$,

$$|a_{n'}|^{1/n} = \left(|a_{n'}|^{1/n'}\right)^{n'/n} = \left(\frac{1}{R}\right)^{n'/n} < \left(\frac{1}{R}\right)^{1+\alpha}$$

and hence

$$\overline{\lim}\,|a_{n'}|^{1/n} \leqq \left(\frac{1}{R}\right)^{1+\alpha} < \frac{1}{R},$$

so that $\varrho' > \varrho$.

**Case 2.** Let $S$ be a finite set. Then the set $T = \{t_1, t_2, \ldots\}$ must be an infinite set. As before, take $R$ greater than unity and define $\sum_0^\infty a_n z^n$ by taking

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{R^n} & \text{when} \quad n = t_1', t_2', \ldots, \\ 0 & \text{for other values of } n. \end{cases}$$

In this case, when $n \in T$,

$$|a_{n'}|^{1/n} = \left(\frac{1}{R}\right)^{n'/n} > \left(\frac{1}{R}\right)^{1-\alpha}$$

which implies that $\varrho' < \varrho$. This completes the proof.

From the above discussion it is easy to see that, if $\varrho > 1$, only those coefficients which are shifted to the right (that is, those $a_{n'}$ for which $n' < n$) tend to decrease the radius of convergence. Hence, for the class of power series having $\varrho > 1$, a necessary and sufficient condition that the rearrangement $\pi(n' \to n)$ does not decrease (increase) the radius of convergence is that $n' = n + o(n)$ when $n' < n$ $(n' > n)$. Similar results are true when $\varrho < 1$.

3. If we consider only those power series which have $\varrho = 1$, we obtain

THEOREM 2. *A necessary and sufficient condition that a rearrangement* $\pi(n' \to n)$ *keeps unaltered the radius of convergence of any power series* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *whose radius of convergence is unity is that* $n' = n + O(n)$.

PROOF. To prove that the condition is sufficient, we notice that (1) is now replaced by

$$0 < (1-\delta)^{n'/n} < |a_{n'}|^{1/n}$$

for infinitely many $n$.

Now, for all $n$ $(\neq 0)$, it follows from the condition on $n'$ that $\frac{n'}{n} < K$, where $K$ is some fixed positive number. Therefore, for infinitely many $n$

$$\begin{aligned} |a_{n'}|^{1/n} &> (1-\delta)^K \\ &> 1-\varepsilon \quad \text{if } \delta \text{ is sufficiently small.} \end{aligned}$$

Similarly, in place of (3), we have, for all sufficiently large $n$,

$$\begin{aligned} |a_{n'}|^{1/n} &< (1+\delta)^{n'/n} \\ &< (1+\delta)^K \\ &< 1+\varepsilon \quad \text{if } \delta \text{ is sufficiently small.} \end{aligned}$$

To show that the condition is necessary, let us take any rearrangement for which $n' \neq n + O(n)$, so that $n'/n$ is greater than any given positive number for infinitely many values of $n$. Suppose that $\frac{n'}{n} > r$ (positive integer) when $n = u_r$ and that, without any loss of generality, $u_1 < u_2 < u_3 < \cdots$. Define the series $\sum_0^\infty a_n z^n$ by taking

$$a_n = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^n & \text{when} \quad n = u'_r \quad (r = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{for other values of } n. \end{cases}$$

Clearly $\varrho = 1$ and $\varrho' = 1/\overline{\lim}\, |a_{n'}|^{1/n}$, $n$ always remaining in the set $\{u_1, u_2, \ldots\}$. But, if $n = u_r$, then

$$|a_{n'}|^{1/n} = \left(|a_{n'}|^{1/n'}\right)^{n'/n} > \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r.$$

Hence $\varrho' < 1$ *.

*(University of Malaya, Singapore)*

*(Eingegangen am 3. Juni 1960)*

---

*) I wish to thank Prof. H. WIELANDT for pointing to me, after the present paper was submitted for publication, that the two papers named below contain results that can be used to prove the theorems in the present paper.

1. SHEFFER, I. M.: Systems of linear equations of analytic type. Duke Math. J. **11**, 167—180 (1944).

2. ZELLER, K.: Transformationen des Durchschnitts und der Vereinigung von Folgenräumen. Math. Nachr. **10**, 175—177 (1953).

Wolfson, K. G.
Math. Zeitschr. 75, 328–332 (1961)

# Baer subrings of the ring of linear transformations

By

Kenneth G. Wolfson[1])

**1. Introduction.** In [4] Kaplansky has used the term Baer ring to denote those rings in which the left (right) annihilator of each subset is a principal left (right) ideal generated by an idempotent element. One of the examples given in [4] of a Baer ring is the set of all two by two triangular matrices over a field. It is the purpose of this note to show that this example is a particular case of a class of Baer subrings of the Baer ring of all linear transformations of a vector space. In particular the ring of all $n \times n$ triangular matrices over any division ring is a Baer ring, for any finite $n$.

Let $T(F_n)$ denote the ring of all $n \times n$ triangular matrices over $F$. Then we get the following result: If $F$, $G$ are division rings, then any ring isomorphism of $T(F_n)$ and $T(G_m)$ implies $m = n$ and $F$ and $G$ isomorphic, provided $m$ or $n$ is at least three.

**2. Definitions and preliminaries.** The following basis free characterization of the ring of all triangular matrices serves as motivation for the class of rings to be considered.

Theorem 1. *Let $Q$ be a ring of linear transformations of the $n$ dimensional vector space $(F, A)$ over the division ring $F$. Then there exists a basis of $(F, A)$ such that the elements of $Q$ are simultaneously in triangular form (zeros below the main diagonal) if and only if there exists a sequence $0 = A_0 < A_1 < A_2 < \cdots < A_{n-1} < A_n = A$ of invariant subspaces $A_i$, where $A_i$ is of dimension $i$.*

Proof. Let $Q$ be a set of $n \times n$ triangular matrices considered as operators on the right of the vector space $(F, A)$ of row vectors. Let $A_i$ be the subspace consisting of all vectors with the first $n - i$ components zero. Then $A_i$ is of dimension $i$, $A_i < A_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ and each $A_i$ is invariant under $Q$.

Suppose conversely that $Q$ is given as a set of linear transformations of the $n$-dimensional vector space $(F, A)$ with invariant subspaces $A_i$ of dimension $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ with $A_i < A_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Let $e_n$ be a basis for $A_1$. Let $e_n, e_{n-1}$ be a basis for $A_2$. In general let $A_i$ have the basis $e_n, e_{n-1}, \ldots, e_{n-i+1}$. If $\sigma \in Q$, then because of the invariance of each $A_i$, $e_i\sigma$ is a linear combination of those $e_j$ with $j \geqq i$. Then under the usual correspondence $\sigma \leftrightarrow (\alpha_{ij})$ where $e_i\sigma = \sum_1^n \alpha_{ij} e_j$, it is seen that $(\alpha_{ij})$ is a triangular matrix.

[1]) Research supported in part by a grant from the Research Council of Rutgers University. The author also wishes to acknowledge several helpful conversations with Professor Richard Cohn during the preparation of this paper.

Now let $(F, A)$ be a vector space of arbitrary dimension (finite or infinite) over a division ring $F$. Let $0=A_0<A_1\leqq A_2\leqq A_3\leqq\cdots\leqq A_{n-1}<A_n=A$ be a fixed sequence of subspaces. Let $K$ be the ring of all those linear transformations of $(F, A)$ which leave each $A_i$ invariant. This is the class of rings to be considered. In particular $K$ might be the set of all those linear transformations leaving invariant one subspace $A_1$. It is seen that $K$ always has an identity element. If $(F, A)$ has finite dimension $n$, and we have an $A_i$ of dimension $i$ for each $i=0, 1, 2, \ldots, n$ then $K$ is isomorphic to the ring of all $n\times n$ triangular matrices over $F$.

If $J$ is any subset of $K$, then $\mathscr{L}(J)$ is the set of all $\sigma$ in $K$ such that $\sigma J=0$. The right annihilator $\mathscr{R}(J)$ is defined similarly. If $S$ is any subset of $A$, then $R(S)$ is the totality of elements $\varrho$ in $K$, such that $S\varrho=0$, and $L(S)$ is the totality of $\alpha$ in $K$ for which $A\alpha\leqq S$. If $Q$ is any subset of $K$, then $N(Q)$ is the totality of $x$ in $A$ for which $xQ=0$, and $AQ$ is the set of elements $aq$ for $a$ in $A$ and $q$ in $Q$.

We state the following generalizations of theorems which are proven in [5]. The proofs go over unchanged to the present case.

LEMMA 2. (1) $R(S)=\mathscr{R}[L(S)]$ *if* $S$ *is a subspace for which* $AL(S)=S$.

(2) $L(S)=\mathscr{L}[R(S)]$ *if* $S$ *is a subspace for which* $N[R(S)]=S$.

(3) $\mathscr{L}(Q)=L[N(Q)]$ *for any subset* $Q$ *of* $K$.

(4) $J=R[N(J)]$ *for every right annihilator* $J$, *if* $AL(S)=S$ *for every subspace* $S$ *of* $A$.

(5) $H=L(AH)$ *for every left annihilator* $H$, *if* $AL(S)=S$ *for every subspace* $S$ *of* $A$.

Let $A^*$ denote the (right) vector space of all linear functionals on $A$ (all $F$ homomorphisms of $A$ into $F$). If $x\in A$ and $f\in A^*$ the effect of $f$ operating on $x$ will be denoted by $(x, f)$. If $S$ is any subspace of $A$, then $S'$ is the subspace of elements $f\in A^*$ for which $(x, f)=0$, for each $x\in S$. If $T$ is a subspace of $A^*$ a similar definition of $T'$ holds. Each subspace $S$ of $A$ satisfies $S''=(S')'=S$ ([1], p. 30).

**3. The annihilating ideals.** We have

LEMMA 3. $AL(S)=S$ *for every subspace* $S$ *of* $A$.

PROOF. Pick an element $w$ not in $A_{n-1}$. Then we can find an $f\in(A_{n-1})'$ such that $(w, f)\neq 0$. For otherwise $(w, A'_{n-1})=0$ and $w\in(A_{n-1})''=A_{n-1}$. Normalize $f$ so that $(w, f)=1$. It is only necessary to prove $S\leqq AL(S)$. Let $s\in S$. Define the transformation $\sigma$ by: $x\sigma=(x, f)s$. Then $\sigma$ is a linear transformation in $K$ since $A_{n-1}\sigma=0$ so $A_i\sigma\leqq A_i$ for each $i$. Clearly $A\sigma=Fs$ so $\sigma\in L(S)$. Since $w\sigma=s$ we have

$$s=w\sigma\in A\sigma\leqq AL(S) \quad \text{so that} \quad S\leqq AL(S)$$

completing the proof.

LEMMA 4. $N[R(S)]=S$ *for every subspace* $S$ *of* $A$.

PROOF. It is only necessary to prove $N[R(S)] \subseteq S$. Assume by way of contradiction that $b \in N[R(S)]$ but $b \notin S$. As in the proof of the preceding Lemma we can find an $f \in S'$ such that $(b, f) = 1$. Let $a$ be a non-zero element of $A_1$. Define a linear transformation $\varrho$ by:

$$x\varrho = (x, f)\, a \quad \text{for each} \quad x \in A.$$

Then $A\varrho = Fa$ yields $A_i\varrho \subseteq A_1 \subseteq A_i$ for each $i$, and $\varrho \in K$. But $S\varrho = 0$, $b\varrho = a \neq 0$. Hence $\varrho \in R(S)$, but $bR(S) \neq 0$ implies $b \notin N[R(S)]$. This contradiction completes the proof.

Armed with the preceding Lemmas we can now state the following theorem. The proofs are now the same as those of Theorem 4 and Corollary 5 of [6].

THEOREM 5. (1) *The correspondence $S \leftrightarrow L(S)$ is a lattice isomorphism of the lattice of all subspaces of $A$ upon the lattice of all left annihilating ideals of $K$.*

(2) *The correspondence $S \leftrightarrow R(S)$ is a lattice anti-isomorphism of the lattice of all subspaces of $A$ upon the lattice of all right annihilating ideals of $K$.*

(3) *A left annihilator $L(S)$ is generated by an idempotent if and only if, $K$ contains an idempotent with range $S$.*

(4) *A right annihilator $R(S)$ is generated by an idempotent if and only if $K$ contains an idempotent with null space $S$.*

REMARK. The preceding results can be seen to hold for a larger class of rings than we have considered. Firstly, the proofs would be unaltered if there were infinitely many invariant subspaces $A_i$ provided there was both a smallest and largest proper invariant subspace in the collection. Secondly, we could consider a pair of dual spaces $(A, B)$ over the division ring $F$, and then look at the ring of all those continuous linear transformations leaving invariant the (possibly infinite) collection of subspaces $A_i$ with smallest and largest member (which is assumed closed). (A subspace $M$ is closed if $M'' = M$.) The proof of Lemma 3 is unchanged in this case. Lemma 4 holds for $S$ closed, and Theorem 5 establishes the correspondences between the annihilating ideals and the closed subspaces.

**4. Baer rings.** We show that the rings discussed in section 2 are Baer rings.

THEOREM 6. *$K$ is a Baer ring.*

PROOF. In view of Theorem 5 and the Remark on p. 159 of [6] it is sufficient to show that if $S$ is any subspace of $A$, then $K$ contains an idempotent with range $S$. The following easily verified fact c.f.e.g. ([2], p. 179, Theorem 9) will be used repeatedly: Let $M$ and $N$ be subspaces with $M \cap N$ having a basis $\{x_i\}$. If $\{y_i\}$ forms a basis for a complement of $M \cap N$ in $M$, and $\{z_i\}$ a basis for a complement of $M \cap N$ in $N$, then the set of the $x_i$, $y_i$, $z_i$ forms a basis for $M + N$.

Now consider the following sequence of subspaces:

$$0 \subseteq S \cap A_1 \subseteq S \cap A_2 \subseteq S \cap A_3 \subseteq \cdots \subseteq S \cap A_{n-1} \subseteq S \cap A_n = S \cap A = S.$$

Take a basis for $S\cap A_1$ and extend to a basis of $A_1$ and also to a basis of $S\cap A_2$. This is possible since $A_1\cap(S\cap A_2)=S\cap A_1$. We define a linear transformation $\sigma$ of $A$ inductively. Put it equal to the identity on $S\cap A_1$. On the complement of $S\cap A_1$ in $S\cap A_2$, $\sigma$ is also the identity. The basis elements of the complement of $S\cap A_1$ in $A_1$ are mapped by $\sigma$ onto zero. The mapping is now defined on $A_1+S\cap A_2$. We now extend the basis of $S\cap A_2$ to a basis of $S\cap A_3$ and also to a basis of $A_2$, being careful in this latter extension to first extend to the basis of $A_1+S\cap A_2$ already constructed. Let $\sigma$ again be the identity map on the complement of $S\cap A_2$ in $S\cap A_3$ and the zero map on the complement of $A_1+S\cap A_2$ in $A_2$. Continue the extension in this manner. Suppose we have $\sigma$ defined on $A_{i-1}$ and $S\cap A_i$. We extend the basis of $S\cap A_i$ to $S\cap A_{i+1}$, and extend the basis of $(S\cap A_i)+A_{i-1}$ to one for $A_i$. Again this is possible since $(S\cap A_{i+1})\cap A_i=S\cap A_i$. We keep $\sigma$ the identity on $S\cap A_{i+1}$ and map the complement of $(S\cap A_i)+A_{i-1}$ in $A_i$ onto zero. We arrive finally at a transformation defined on $S\cap A_n=S$ and on $A_{n-1}$ (being the identity on $S$). If $S+A_{n-1}$ is not all of $A$, the definition of $\sigma$ is completed by mapping a complement of $S+A_{n-1}$ in $A$ onto zero. It is clear that $A_1\sigma\subseteqq A_1$. Assume that the subspaces $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ are all invariant under $\sigma$. If $x\in A_i$, $x=u+v+w$ with $u\in S\cap A_i$, $v\in A_{i-1}$, and $w$ in a complement of $(S\cap A_i)+A_{i-1}$ in $A_i$. Then $x\sigma=u\sigma+v\sigma+w\sigma$. But $u\sigma=u$, $v\sigma\in A_{i-1}$ and $w\sigma=0$. Hence $x\sigma=u+v\sigma\in A_i+A_{i-1}\subseteqq A_i$, so that $A_i\sigma\subseteqq A_i$. Clearly $\sigma$ is the identity on $S$. It will be idempotent if its range is exactly $S$. Let $\{x_i\}$ be a basis of $S\cap A_{n-1}$. Let $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ form a basis of $S$, and $\{x_i\}$, $\{z_i\}$ a basis of $A_{n-1}$. Finally let $\{w_i\}$ be a basis for a complement of $S+A_{n-1}$ in $A$. Then if $a\in A$, $a=b+c+d+e$, $b\in S\cap A_{n-1}$, $c$ in space spanned by $\{y_i\}$, $d$ in space spanned by $\{z_i\}$, and $e$ in space spanned by $\{w_i\}$. Then $b\sigma=b$, $c\sigma=c$, $d\sigma=0$, and $e\sigma=0$. Hence $a\sigma=b+c\in S$. This completes the proof.

Remark. The rings $K$ are not in general even semi-simple. The set of $n\times n$ strictly triangular matrices (those with zeros also on the main diagonal) forms a two-sided nilpotent ideal of the ring of $n\times n$ triangular matrices. Hence in this latter ring there exist left (and hence also right) ideals which are not annihilating ideals. For if each left ideal was an annihilator, it would be generated by an idempotent (Theorem 6). But this implies semi-simplicity ([3], Theorem 7).

Let $T(F_n)$ denote the ring of all $n\times n$ triangular matrices with elements in the ring $F$. We have the following result:

Theorem 7. *Suppose $F$ and $G$ are division rings, and that $m$ or $n$ is at least three. Then any isomorphism of the rings $T(F_n)$ and $T(G_m)$ implies that $n=m$, and $F$ and $G$ are ring isomorphic.*

Proof. Let $(F, A)$ be the vector space of $n$-tuples of elements of $F$, and $(G, B)$ the set of $m$-tuples of elements from $G$. View $T(F_n)$ and $T(G_m)$ as the rings of linear transformations leaving the appropriate subspaces invariant. Since a ring isomorphism will map left annihilators onto left annihilators,

it will induce a lattice isomorphism of the set of left annihilators in $T(F_n)$ upon the set of left annihilators in $T(G_m)$. Using Theorem 5 we get a lattice isomorphism of the lattice of subspaces of $(F, A)$ upon the lattice of subspaces of $(G, B)$. Thus the dimensions of the spaces are equal, so that $m=n$. Now the Fundamental Theorem of Projective Geometry ([1], p. 44) tells us that $F$ and $G$ are isomorphic, since $m=n\geqq 3$.

## References

[1] BAER, R.: Linear Algebra and Projective Geometry. New York 1952.
[2] BIRKHOFF, G., and S. MACLANE: A Survey of Modern Algebra. New York 1947.
[3] JACOBSON, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945).
[4] KAPLANSKY, I.: Rings of Operators. The University of Chicago (mimeographed), 1955.
[5] WOLFSON, K. G.: An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations. Amer. J. Math. **75**, 358—386 (1953).
[6] WOLFSON, K. G.: A class of primitive rings. Duke Math. J. **22**, 157—163 (1955).

*Rutgers University, New Brunswick, N.J. (U.S.A.)*

*(Eingegangen am 10. Juni 1960)*

Baer, R.
Math. Zeitschr. 75, 333–372 (1961)

# Partitionen endlicher Gruppen

Richard Brauer, dem alten Freunde, zum 10. Februar 1961 gewidmet

Von

Reinhold Baer

Unter einer *Partition* der endlichen Gruppe $G \neq 1$ wird eine Menge $\sigma$ von 1 verschiedener Untergruppen von $G$ derart verstanden, daß jedes von 1 verschiedene Element aus $G$ in einer und nur einer Untergruppe aus $\sigma$ liegt. Enthält $\sigma$ mit einer Untergruppe alle zu ihr konjugierten Untergruppen von $G$, so heiße $\sigma$ *normal*. Jede von 1 verschiedene Gruppe $G$ besitzt wenigstens eine Partition, nämlich die aus $G$ allein bestehende *triviale* Partition.

Die anscheinend recht tiefe Frage, welche endlichen Gruppen nicht-triviale Partitionen besitzen, werden wir nur streifen. Wir werden uns vielmehr mit der Strukturanalyse gegebener normaler Partitionen befassen.

Frobenius-Partitionen. Dies sind normale, nicht triviale Partitionen, unter deren Komponenten wenigstens eine ihrem Normalisator gleich ist. Aus dem klassischen Satz von Frobenius folgt dann die Existenz eines zu diesen Komponenten komplementären Normalteilers; ist dieser auch eine Komponente, so wollen wir von einer *minimalen* Frobenius-Partition sprechen. Es sei bemerkt, daß eine Gruppe höchstens eine minimale Frobenius-Partition besitzen kann [Satz 6.6].

Elementare Partitionen. Von einer solchen wollen wir sprechen, wenn es einen von $G$ verschiedenen Normalteiler $K$ derart gibt, daß alle nicht in $K$ enthaltenen zyklischen Untergruppen von $G$ Komponenten der Partition sind und Primzahlordnung haben. Alle normalen, nicht-trivialen Partitionen von $p$-Gruppen sind im eben angegebenen Sinne elementar [Zusatz 5.6].

Nicht-einfache Partitionen. Die Partition $\sigma$ von $G$ heiße nicht-einfach, wenn es einen eigentlichen Normalteiler $K$ von $G$ derart gibt, daß $K \cap X = 1$ für jede nicht in $K$ enthaltene Komponente $X$ von $\sigma$ gilt. Alle Frobenius-Partitionen und die meisten elementaren Partitionen sind nicht-einfach. Umgekehrt gilt: Ist die Partition $\sigma$ der Gruppe $G$ normal und weder trivial noch einfach noch eine Frobenius-Partition, ist weiter $G$ keine Primärgruppe, so gibt es eine Komponente $K$ von $\sigma$ mit folgenden Eigenschaften: $[G:K]$ ist eine Primzahl $p$ und $K$ wird von den Elementen mit von $p$ verschiedener Ordnung erzeugt, so daß $K$ charakteristisch ist und die nicht in $K$ enthaltenen Elemente sämtlich die Ordnung $p$ haben, $\sigma$ also elementar ist [Satz 5.1].

Hallsche Partitionen. Dies sind Partitionen, deren Komponenten teilerfremde Ordnung und Index haben, d.h. Hallsche Untergruppen sind. Eine normale Partition ist dann und nur dann Hallsch, wenn vertauschbare

Elemente in der gleichen Komponente liegen [Satz 6.1]; und eine Frobenius-Partition ist dann und nur dann minimal, wenn sie Hallsch ist [Satz 6.8]. Ist eine Hallsche Partition $\sigma$ der Gruppe $G$ normal, so ist $\sigma$ entweder trivial oder eine Frobenius-Partition oder $G$ ist eine einfache nicht-abelsche Gruppe und die Komponenten von $\sigma$ sind genau die maximalen nilpotenten Untergruppen von $G$ [Satz 6.11].

Die Komponenten normaler, nicht trivialer Partitionen sind in ihrer Struktur sehr eingeschränkt. Meist sind sie nilpotent*, seltener Erweiterungen nilpotenter durch Primärgruppen; sind sie aber nicht solche Erweiterungen, so sind sie gleich ihrem Normalisator und wir haben es mit einer Frobenius-Partition zu tun; vgl. besonders §7.

Die Beweise beruhen auf einer systematischen Anwendung der sehr naheliegenden Lemmata 2.1 und 2.5 und der sehr tief liegenden Sätze von THOMPSON und von HUGHES-THOMPSON.

BEZEICHNUNGEN:

$o(g)$ = Ordnung des Gruppenelements $g$.

$o(G)$ = Ordnung der Gruppe $G$.

$p$-Element [$p$-Gruppe] = Element [Gruppe] mit $p$-Potenzordnung

$\mathfrak{Z}G$ = Zentrum der Gruppe $G$

$\mathfrak{F}G$ = Fittingsche Untergruppe der Gruppe $G$ = Produkt der nilpotenten Normalteiler von $G$.

$\mathfrak{S}G$ = Sockel der Gruppe $G$ = Produkt aller minimalen Normalteiler von $G$.

$\mathfrak{N}U$ = Normalisator der Untergruppe $U$ von $G$ in $G$.

$\mathfrak{C}U$ = Zentralisator der Teilmenge $U$ von $G$ in $G$.

$a^b = b^{-1}ab = a(a \circ b)$.

$x \circ Y$ = Menge der Elemente $x^{-1}y^{-1}xy$ mit $y$ in $Y$.

Normalisatorgleich sind $U = \mathfrak{N}U$ erfüllende Untergruppen.

Komplementär sind $G = AB = BA$, $1 = A \cdot B$ erfüllende Untergruppen $A$, $B$ von $G$.

$A < B$ bedeutet, daß $A$ Untergruppe $\neq B$ von $B$ ist.

Frobenius-Automorphismen sind Automorphismen von Primzahlordnung ohne von 1 verschiedene Fixelemente.

Frobenius-Gruppen von Automorphismen sind Gruppen $\Gamma$ von Automorphismen derart, daß 1 der einzige Automorphismus aus $\Gamma$ mit von 1 verschiedenen Fixelementen ist.

Hallsche Untergruppen sind Untergruppen, deren Ordnung und Index teilerfremd sind.

ALLE BETRACHTETEN GRUPPEN SIND ENDLICH.

*) *Zusatz bei der Korrektur* [22. Januar 1961]. Inzwischen hat Herr O. KEGEL den Nachweis geführt, daß Komponenten nilpotent sind, wenn sie nicht gleich ihrem Normalisator sind.

## 1. Anzahlbeziehungen und Trivialitätskriterien

Eine Partition der Gruppe $G$ ist eine Menge $\sigma$ von 1 verschiedener Untergruppen von $G$ derart, daß jedes von 1 verschiedene Element aus $G$ in einer und nur einer Untergruppe aus $\sigma$ enthalten ist. Die Untergruppen aus $\sigma$ werden wir auch als *Komponenten der Partition* $\sigma$ bezeichnen. Die charakteristische Eigenschaft einer Partition kann man auch in die folgenden beiden Teile zerlegen:

I. Partitionen sind Überdeckungen der Gruppe.

II. Verschiedene Komponenten einer Partition haben nur die Eins gemein.

Die Eigenschaft II werden wir gewöhnlich in der „negativen" Form anwenden:

Sind $A$ und $B$ Komponenten einer Partition, so ist dann und nur dann $A=B$, wenn $A\cap B\neq 1$ ist.

Die von uns betrachteten Partitionen werden vorwiegend normal sein. Hierbei wird eine Partition *normal* genannt, wenn mit einer Untergruppe alle zu ihr konjugierten Untergruppen Komponenten der Partition sind. Normale Partitionen bestehen also aus ganzen Klassen konjugierter Untergruppen.

Geometrische Interpretation. Ist $\sigma$ eine normale Partition der Gruppe $G$, so sei $\pi$ die Menge aller Restklassen von $G$ nach Untergruppen aus $\sigma$. [Wegen $Sx=xx^{-1}Sx$ brauchen wir bei normalen Partitionen nicht zwischen Rechts- und Linksrestklassen zu unterscheiden.] Jedes Paar verschiedener Elemente aus $G$ liegt dann auf einer und nur einer Restklasse aus $\pi$, so daß $\pi$ als Inzidenzstruktur angesehen werden kann.

Ist $\mathfrak{X}=X^G$ die Klasse der zu $X$ konjugierten Untergruppen von $G$, so haben alle Untergruppen aus $\mathfrak{X}$ dieselbe Ordnung; wir können also $o(\mathfrak{X})=o(X)$ setzen. Ebenso dürfen wir $i(\mathfrak{X})=[G:\mathfrak{N}X]$ und $d(\mathfrak{X})=[\mathfrak{N}X:X]$ setzen, da diese beiden Zahlen von der Auswahl des speziellen Individuums $X$ in der Klasse $\mathfrak{X}$ unabhängig sind. Es sei noch auf die bekannte Tatsache hingewiesen, daß $i(\mathfrak{X})$ *genau die Zahl der Untergruppen in der Klasse* $\mathfrak{X}$ ist, und daß

$$o(G)=i(\mathfrak{X})\,d(\mathfrak{X})\,o(\mathfrak{X}) \tag{1.0}$$

gilt.

Ist $\sigma$ eine normale Partition der Gruppe $G$, so sei $i(\sigma)$ die Anzahl der Komponenten von $\sigma$. Natürlich gilt dann

$$i(\sigma)=\sum_{\mathfrak{X}\subseteq\sigma} i(\mathfrak{X}),$$

wobei die Summe über alle in $\sigma$ enthaltenen Klassen konjugierter Untergruppen zu erstrecken ist. Wir setzen weiter

$$r(\sigma)=\sum_{\mathfrak{X}\subseteq\sigma} d(\mathfrak{X})^{-1},$$

wobei wir wieder dieselbe Konvention über die Summation anwenden.

Durch Abzählen der von 1 verschiedenen Elemente in der Gruppe $G$ ergibt sich nun für jede normale Partition $\sigma$ von $G$ die folgende Beziehung:

$$(1.1)\quad o(G)-1=\sum_{X\in\sigma}\left[o(X)-1\right]=\sum_{\mathfrak{X}\subseteq\sigma}i(\mathfrak{X})\left[o(\mathfrak{X})-1\right]=o(G)\,r(\sigma)-i(\sigma)$$

oder

$$(1.2)\quad o(G)\left[r(\sigma)-1\right]=i(\sigma)-1.$$

Bedenken wir, daß jeder der Indizes $i(\mathfrak{X})$ ein Teiler von $o(G)$ ist, so ergibt sich, daß der größte gemeinschaftliche Teiler aller $i(\mathfrak{X})$ wegen (1.1) ein Teiler von 1 ist; und wir haben gezeigt:

(1.3) *Ist $\sigma$ eine normale Partition von $G$, so ist der größte gemeinschaftliche Teiler aller Indizes $i(\mathfrak{X})$ für in $\sigma$ enthaltene Klassen $\mathfrak{X}$ konjugierter Untergruppen gleich* 1.

BEMERKUNG. Dieses Resultat kann man auch folgendermaßen direkt herleiten: Es sei $\sigma$ eine normale Partition der Gruppe $G$ und $P\neq 1$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $G$. Dann enthält $\mathfrak{Z}P$ ein Element $t\neq 1$; und dieses liegt in einer und nur einer Komponente $T$ von $\sigma$. Ist $a$ irgendein Element aus $P$, so liegt $t=t^a$ in $T\cap T^a$, woraus wir $T=T^a$ wegen der Zugehörigkeit von $T^a$ zur normalen Partition $\sigma$ erschließen können. Folglich gehört $a$ zu $\mathfrak{N}T$; und damit ist $P\subseteq\mathfrak{N}T$ bewiesen. *Jede Sylow-Untergruppe von $G$ liegt also im Normalisator von wenigstens einer Komponente von $\sigma$*; dies ist eine mit (1.3) äquivalente Aussage.

Wir erinnern daran, daß eine Partition *trivial* heißt, wenn sie nur aus der einen Untergruppe $G$ besteht. Es ist klar, daß die Partition $\sigma$ dann und nur dann trivial ist, wenn $i(\sigma)=1$ ist; und dies ist wegen (1.2) für normale Partitionen mit $r(\sigma)=1$ gleichwertig. Also gilt:

(1.4) *Die normale Partition $\sigma$ ist dann und nur dann trivial, wenn $r(\sigma)=1$ ist.*

Für nicht-triviale normale Partitionen ist $i(\sigma)-1$ positiv; und aus (1.2) folgt dann sofort $1<r(\sigma)$, da ja Ordnungen positiv sind. — Da alle Komponenten einer Partition von 1 verschieden sind, so ist $2\leqq o(\mathfrak{X})$ für jede in $\sigma$ enthaltene Klasse konjugierter Untergruppen. Aus (1.0) folgt

$$i(\mathfrak{X})\leqq\tfrac{1}{2}o(G)\,d(\mathfrak{X})^{-1};$$

und Summation über alle Klassen $\mathfrak{X}$ ergibt dann

$$i(\sigma)\leqq\tfrac{1}{2}o(G)\,r(\sigma).$$

Kombination mit (1.1) ergibt weiter

$$\tfrac{1}{2}o(G)\,r(\sigma)\leqq o(G)\,r(\sigma)-i(\sigma)=o(G)-1<o(G).$$

Damit haben wir gezeigt:

(1.5) *Ist $\sigma$ eine nicht-triviale, normale Partition von $G$, so ist* $1<r(\sigma)<2$.

Bemerkung. Ist etwa $G$ eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung $2^n$ und $\sigma$ die aus allen zyklischen Untergruppen der Ordnung 2 bestehende normale Partition von $G$, so ist $i(\sigma)=2^n-1$, jedes $i(\mathfrak{X})=1$ und jedes $d(\mathfrak{X})=2^{n-1}$, woraus

$$r(\sigma)=2^{-n}[2^n-2]+1=2-2^{1-n}$$

folgt. Durch hinreichend große Wahl von $n$ kann man also $r(\sigma)$ beliebig nahe an 2 heranbringen; die Ungleichung (1.5) ist folglich im allgemeinen keiner Verbesserung fähig. Die obere Schranke wird aber kleiner werden, wenn man spezielle Annahmen über $\sigma$ macht.

Lemma 1.6. *Ist $\sigma$ eine normale Partition von $G$, so sind irgend zwei normalisatorgleiche Komponenten von $\sigma$ in $G$ konjugiert.*

Beweis. Aus (1.5) und der Definition von $r(\sigma)$ folgt, daß höchstens eines der $d(\mathfrak{X})=1$ sein kann. Da aber $d(\mathfrak{X})=1$ mit $X=\mathfrak{N}X$ für $X$ aus $\mathfrak{X}$ gleichwertig ist, so müssen normalisatorgleiche Komponenten von $\sigma$ der gleichen Klasse konjugierter Untergruppen von $G$ angehören.

Satz 1.7. *Die folgenden Eigenschaften der normalen Partition $\sigma$ von $G$ sind äquivalent:*

(a) *$\sigma$ ist trivial.*

(b) *Die Komponenten von $\sigma$ sind sämtlich normalisatorgleich.*

(c) *Die Komponenten von $\sigma$ sind in $G$ konjugiert.*

Beweis. Ist $\sigma$ trivial, so ist $G$ die einzige Komponente von $\sigma$; und diese ist gewiß normalisatorgleich. Also folgt (b) aus (a). — Es ergibt sich aus Lemma 1.6, daß (c) aus (b) folgt. — Gilt (c), so ist $i(\sigma)=1$ wegen (1.3). Also besteht $\sigma$ nur aus einer Komponente, d.h. $\sigma$ ist trivial, womit (a) aus (c) hergeleitet ist.

Folgerung 1.8. *Besteht die normale Partition $\sigma$ von $G$ nur aus maximalen auflösbaren Untergruppen von $G$, so ist sie trivial [und also $G$ selbst auflösbar].*

Beweis. Ist $U$ eine maximale auflösbare Untergruppe von $G$ und $g$ ein Element aus $\mathfrak{N}U$, so ist auch $\{U, g\}=U\{g\}$ auflösbar; und aus der Maximalität von $U$ folgt also die Zugehörigkeit von $g$ zu $U$, d.h. die Normalisatorgleichheit von $U$. Folglich besteht $\sigma$ nur aus normalisatorgleichen Komponenten; und wir können aus Satz 1.7 die Trivialität von $\sigma$ erschließen.

## 2. Vertauschbarkeit und Zugehörigkeit zur gleichen Komponente

Das folgende ebenso einfache wie nützliche Kriterium ist wohlbekannt und sei hier mit seinem Beweis der Bequemlichkeit des Lesers wegen eingefügt.

Lemma 2.1. *Ist $\sigma$ eine Partition der Gruppe $G$, sind $a$ und $b$ vertauschbare Elemente aus $G$ [d.h. $ab=ba$], deren Ordnungen nicht beide gleich derselben Primzahl sind, so gehören $a$ und $b$ derselben Komponente von $\sigma$ an.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $a\neq 1\neq b$ ist.

*Fall 1.* $o(a)\neq o(b)$.

Dann ist nicht gleichzeitig $o(a)$ ein Teiler von $o(b)$ und $o(b)$ ein Teiler von $o(a)$. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $o(a)$ kein Teiler von $o(b)$ ist. Dies ist gleichwertig mit $a^{o(b)} \neq 1$. Es gibt eine $a$ enthaltende Komponente $A$ und eine $ab$ enthaltende Komponente $B$ von $\sigma$; und aus $ab = ba$ folgt

$$1 \neq a^{o(b)} = (ab)^{o(b)} \in A \cap B.$$

Aus der Fundamentaleigenschaft II der Partitionen folgt $A = B$, so daß mit $a$ und $ab$ auch $b$ zu $A$ gehört.

*Fall 2.* $o(a) = o(b)$.

Dann ist $o(a)$ nach Voraussetzung keine Primzahl. Aus $a \neq 1$ folgt die Existenz eines Primteilers $p$ von $o(a)$, der von $o(a)$ verschieden ist. Insbesondere ist also $a^p \neq 1$. Die Elemente $a^p$ und $b$ sind dann vertauschbare Elemente verschiedener Ordnung, die nach Fall 1 in der gleichen Komponente $B$ von $\sigma$ liegen. Weiter liegt $a$ in einer Komponente $A$ von $\sigma$; und es gilt

$$1 \neq a^p \in A \cap B.$$

Aus der Fundamentaleigenschaft II der Partitionen folgt $A = B$, so daß $a$ und $b$ beide in der Komponente $A$ von $\sigma$ liegen.

BEMERKUNG 2.2. Ist $G$ eine elementar-abelsche $p$-Gruppe, aber nicht zyklisch, so bildet die Gesamtheit der zyklischen Untergruppen der Ordnung $p$ von $G$ eine normale Partition $\sigma$ von $G$. Hier liegen also vertauschbare Elemente nicht immer in der gleichen Komponente; und dies zeigt, daß die die Ordnungen betreffende Voraussetzung in Lemma 2.1 unentbehrlich ist.

FOLGERUNG 2.3. *Ist $\sigma$ eine Partition der Gruppe $G$, ist das Zentrum $\mathfrak{Z}U$ der Untergruppe $U$ von $G$ keine elementare Primärgruppe, so ist $U$ ganz in einer Komponente von $\sigma$ enthalten.*

BEWEIS. Daß die natürlich abelsche Gruppe $\mathfrak{Z}U$ keine elementare Primärgruppe ist, ist gleichwertig mit der Existenz eines Elements $z \neq 1$ in $\mathfrak{Z}U$, dessen Ordnung keine Primzahl ist. Natürlich liegt $z$ in einer und nur einer Komponente $Z$ von $\sigma$. Ist $u$ irgendein Element aus $U$, so ist $uz = zu$; und Anwendung von Lemma 2.1 ergibt die Zugehörigkeit von $z$ und $u$ zur gleichen Komponente von $\sigma$. Da aber $z$ nur in der Komponente $Z$ liegt, so gehört auch $u$ zu $Z$; und damit haben wir das gewünschte $U \subseteq Z$ bewiesen.

BEMERKUNG 2.4. Ist in Folgerung 2.3 insbesondere $U = G$, so ergibt sich das folgende Trivialitätskriterium:

Ist $\mathfrak{Z}G$ keine elementare Primärgruppe, so besitzt $G$ nur die triviale Partition.

Das folgende fast triviale Schlußprinzip wird häufig Anwendung finden:

LEMMA 2.5. *Ist $U$ eine von 1 verschiedene Untergruppe der Komponente $V$ der normalen Partition $\sigma$ von $G$, so ist $\mathfrak{N}U \subseteq \mathfrak{N}V$; ist überdies $U$ eine charakteristische Untergruppe von $V$, so ist $\mathfrak{N}U = \mathfrak{N}V$.*

BEWEIS. Ist nämlich $t \in \mathfrak{N}U$, so wird $1 \neq U = U^t \subseteq V \cap V^t$. Aus der Normalität von $\sigma$ folgt aber, daß $V^t$ mit $V$ eine Komponente von $\sigma$ ist. Also wird $V = V^t$

wegen der Fundamentaleigenschaft II der Partitionen, woraus wir $t \in \mathfrak{N} V$ und also $\mathfrak{N} U \subseteq \mathfrak{N} V$ erschließen. — Ist $U$ eine charakteristische Untergruppe der Untergruppe $V$ von $G$, so induziert jedes $s \in \mathfrak{N} V$ einen Automorphismus von $V$, der die charakteristische Untergruppe $U$ in sich transformiert. Also wird $U = U^s$, so daß $s \in \mathfrak{N} U$ ist und wir $\mathfrak{N} V \subseteq \mathfrak{N} U$ gezeigt haben, womit alles bewiesen ist.

### 3. Zulässige Normalteiler

Ist $\sigma$ eine Partition von $G$, so wollen wir unter einer *$\sigma$-zulässigen Untergruppe* eine Untergruppe $U$ mit folgender Eigenschaft verstehen:

*Ist $X$ eine Komponente von $\sigma$, so ist entweder $X \subseteq U$ oder $X \cap U = 1$,* [d.h. $X \cap U$ ist entweder gleich 1 oder gleich $X$]. Natürlich sind alle Komponenten von $\sigma$ auch $\sigma$-zulässig, während die Umkehrung im allgemeinen nicht richtig ist. Wir werden uns fast ausschließlich mit $\sigma$-zulässigen Normalteilern beschäftigen, die von 1 und von $G$ verschieden sind, den *eigentlichen $\sigma$-zulässigen Normalteilern von $G$.*

Lemma 3.1. *Ist $\sigma$ eine Partition von $G$, $K$ eine $\sigma$-zulässige Untergruppe von $G$ und $L$ eine nicht in $K$ enthaltene, aber $K$ normalisierende Komponente von $\sigma$, so gilt:*

(a) *Ist $\sigma$ normal und $t$ ein Element, das mit wenigstens einem von 1 verschiedenen Element aus $L$ vertauschbar ist, so wird $L$ von $t$ normalisiert.*

(b) $\mathfrak{C} L \cap K = K \cap \mathfrak{N} L$.

(c) *Ist $K \cap \mathfrak{N} L \neq 1$, so gibt es eine $L^p = 1 = [K \cap \mathfrak{N} L]^p$ erfüllende Primzahl $p$.*

Beweis. Die Aussage (a) ist ein Spezialfall von Lemma 2.5.

Es ist klar, daß $L$ zentralisierende Elemente auch $L$ normalisieren. Ist umgekehrt $k$ ein $L$ normalisierendes Element aus $K$, so gilt für die Kommutatoren

$$k \circ L \subseteq K \cap L = 1,$$

da $K$ von $L$ normalisiert wird, und da die Komponente $L$ nicht in der zulässigen Untergruppe $K$ enthalten ist. Also wird $L$ von $k$ sogar zentralisiert; und damit ist die Gl. (b) bewiesen.

Ist schließlich $K \cap \mathfrak{N} L \neq 1$, so gibt es in $K \cap \mathfrak{N} L$ ein Element $s$ von Primzahlordnung $p$. Wegen (b) wird $L$ von $s$ zentralisiert. Ist $x \neq 1$ irgendein Element aus $L$, so sind $x$ und $s$ vertauschbare Elemente, die wegen $K \cap L = 1$ in verschiedenen Komponenten von $\sigma$ liegen. Anwendung von Lemma 2.1 zeigt, daß $s$ und $x$ die gleiche Primzahlordnung $p$ haben. Also ist $L^p = 1$. Insbesondere gibt es in $L$ ein Element $w$ der Ordnung $p$, da ja $L \neq 1$ ist. Ist nun $y \neq 1$ irgendein Element aus $K \cap \mathfrak{N} L$, so sind $y$ und $w$ wegen (b) vertauschbare Elemente, die wieder in verschiedenen Komponenten von $\sigma$ liegen, und die also wegen Lemma 2.1 die gleiche Primzahlordnung $p$ haben. Also ist $[K \cap \mathfrak{N} L]^p = 1$, womit auch (c) bewiesen ist.

Folgerung 3.2. *Ist $\sigma$ eine Partition von $G$, sind $A$ und $B$ von 1 verschiedene, sich gegenseitig normalisierende und $A \cap B = 1$ erfüllende, $\sigma$-zulässige Untergruppen von $G$, so gibt es eine Primzahl $p$ mit $(AB)^p = 1$.*

Aus der Voraussetzung folgt zunächst, daß $A$ und $B$ sich gegenseitig sogar zentralisieren. Jetzt ist aber unsere Behauptung eine einfache Folge aus Lemma 3.1, (c).

LEMMA 3.3. *Ist $\sigma$ eine normale Partition von $G$, ist weiter der eigentliche $\sigma$-zulässige Normalteiler $K$ von $G$ nicht nilpotent*), so gibt es eine Primzahl $p$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *alle nicht in $K$ enthaltenen Elemente aus $G$ haben die Ordnung $p$;*

(b) *$K$ und $G$ sind Erweiterungen nilpotenter durch $p$-Gruppen;*

(c) *$K$ wird von den Elementen mit von $p$ verschiedener Ordnung erzeugt;*

(d) $[G:K]=p$.

BEWEIS. Es sei $X$ irgendeine nicht in $K$ enthaltene Komponente von $\sigma$. Dann enthält $X$ ein Element $a$ von Primzahlordnung $p$. Gäbe es außer 1 kein mit $a$ vertauschbares Element in $K$, so würde $a$ in dem Normalteiler $K$ einen Automorphismus von Primzahlordnung $p$ induzieren, der kein von 1 verschiedenes Fixelement besäße. Aus der Existenz eines solchen Frobenius-Automorphismus von $K$ würde aber nach dem Thompsonschen Satze die nach Voraussetzung ausgeschlossene Nilpotenz von $K$ folgen; vgl. THOMPSON [*1*; p. 579, Theorem 1]. Also gibt es ein Element $k\neq 1$ in $K$ mit $ka=ak$. Wegen $a\neq 1$ folgt aus Lemma 3.1, (a), daß $X$ von $k$ normalisiert wird, und daß also $K\cap\mathfrak{N}X\neq 1$ ist. Anwendung von Lemma 3.1, (c) ergibt dann die Existenz einer $X^p=1$ erfüllenden Primzahl $p=p(X)$.

Ist $g$ ein nicht in $K$ enthaltenes Element aus $G$, so liegt $g$ in einer und nur einer Komponente $R$ von $\sigma$. Diese ist nicht in $K$ enthalten; und nach dem bereits Gezeigten gibt es eine Primzahl $p(R)$ mit $R^{p(R)}=1$. Insbesondere ist $g^{p(R)}=1$; und wir haben gezeigt:

(a*) *alle nicht in $K$ enthaltenen Elemente aus $G$ haben Primzahlordnung.*

Sei wieder $X$ eine nicht in $K$ enthaltene Komponente von $\sigma$. Dann ist $X^p=1$, wo $p=p(X)$ eine Primzahl ist, wie im ersten Absatz unseres Beweises gezeigt. Also ist $KX/K\cong X$ eine $p$-Gruppe. Wegen (a*) haben alle nicht in $K$ enthaltenen Elemente Primzahlordnung; und folglich haben alle nicht in $K$ enthaltenen Elemente aus $KX$ sogar die gleiche Primzahlordnung $p$. Dann enthält $K$ insbesondere die von allen Elementen $w$ mit $o(w)\neq p$ aus $KX$ erzeugte Untergruppe $W$. Wegen $W\leqq K\lhd KX$ können wir einen Satz von HUGHES-THOMPSON anwenden, aus dem hervorgeht, daß $W$ eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe ist; vgl. HUGHES-THOMPSON [*1*; p. 1099, Theorem 3]. Da aber die nicht in $W$ enthaltenen Elemente aus $KX$ und $K$ sämtlich die Ordnung $p$ haben, so ist

(b*) *$K$ eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p(X)$-Gruppe.*

Wäre unsere Behauptung (a) falsch, so gäbe es wegen (a*) zwei Elemente $a$ und $b$ in $G$, die beide nicht in $K$ lägen, und deren Ordnungen verschiedene

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]. O. KEGEL hat inzwischen die Unerfüllbarkeit der Voraussetzungen von Lemma 3.3 gezeigt.

Primzahlen wären. Es liegen $a$ und $b$ in eindeutig bestimmten Komponenten $A$ bzw. $B$ von $\sigma$. Da weder $A$ noch $B$ in $K$ enthalten ist, so folgern wir aus dem ersten Absatz unseres Beweises, daß $A$ und $B$ Primzahlexponenten haben; und zwar wird notwendig $A^{o(a)} = B^{o(b)} = 1$. Anwendung von (b*) ergibt dann, daß $K$ sowohl eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $o(a)$-Gruppe wie auch eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $o(b)$-Gruppe ist; und aus der Verschiedenheit der Primzahlen $o(a)$ und $o(b)$ folgt die nach Voraussetzung ausgeschlossene Nilpotenz von $K$. Aus diesem Widerspruch folgt, daß alle nicht in $K$ enthaltenen Elemente aus $G$ die gleiche Primzahlordnung $p$ haben; und hieraus folgt in Verbindung mit (b*), daß $K$ eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe ist. Da $G/K$ ebenfalls eine $p$-Gruppe ist, so ist auch $G$ eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe.

Sei $V$ die von allen Elementen $v$ mit $o(v) \neq p$ in $G$ erzeugte Untergruppe von $G$. Nach dem bereits Gezeigten ist $V \subseteq K < G$. Da $K$ nicht nilpotent ist, so ist $K$ keine $p$-Gruppe; da aber $K/V$ [wie auch $G/V$] eine $p$-Gruppe ist, so ist $V$, und also auch $G$, keine $p$-Gruppe. Anwendung eines Satzes von Hughes-Thompson ergibt nun $[G:V] = p$; vgl. Hughes-Thompson [*1*; p. 1098, Theorem 1]. Aus $V \subseteq K < G$ und $[G:V] = p$ folgt aber $K = V$, womit auch (c) und (d) bewiesen sind.

Bemerkung 3.4. Sind $p$ und $q$ zwei Primzahlen derart, daß $p^2$ ein Teiler von $q - 1$ ist, so gibt es eine Gruppe $G$ der Ordnung $qp^2$ mit folgenden Eigenschaften: $G$ besitzt einen zyklischen Normalteiler $Q$ der Ordnung $q$; die Faktorgruppe $G/Q$ ist zyklisch von der Ordnung $p^2$ und die von $G$ in $Q$ induzierte Automorphismengruppe ist ebenfalls zyklisch von der Ordnung $p^2$. Insbesondere ist $Q = \mathfrak{C}Q$. Dann besteht eine normale Partition $\sigma$ von $G$ aus $Q$ und den sämtlichen zyklischen Untergruppen der Ordnung $p^2$; diese ist eine sog. Frobenius-Partition. Dann ist zwar $Q$ ein eigentlicher $\sigma$-zulässiger Normalteiler von $G$; aber die nicht in $Q$ enthaltenen Elemente haben nicht sämtlich Primzahlordnung. Die im Lemma 3.3 gemachte Voraussetzung der Nicht-Nilpotenz von $K$ ist also unentbehrlich.

Bemerkung 3.5. Eine wesentliche Verschärfung wird Lemma 3.3 in Satz 4.7, (c) erfahren.

Folgerung 3.6. *Ist der Sockel $\mathfrak{S}G$ der Gruppe $G$ weder abelsch noch einfach, so ist die triviale Partition die einzige normale Partition von $G$.*

Beweis. Es sei $\sigma$ eine normale Partition von $G$. Ist $X$ ein einfacher, nicht-abelscher Normalteiler von $\mathfrak{S}G$, so ist bekanntlich $X$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{S}G$; s. z.B. Zassenhaus, p. 77, Satz 2. Also gilt $\mathfrak{S}G = X \otimes Y$; und nach Voraussetzung ist $Y \neq 1$. Es gibt folglich ein Element $y$ von Primzahlordnung in $Y$; und dieses Element liegt in einer und nur einer Komponente $A$ von $\sigma$. Ist $x$ ein Element aus $X$ mit $o(x) \neq o(y)$, so folgt aus Lemma 2.1, daß $x$ in $A$ liegt. Da aber $X$ als einfache, nicht-abelsche Gruppe von den Elementen mit von $o(y)$ verschiedener Ordnung erzeugt wird, so liegt ganz $X$ in $A$; und wir haben also gezeigt, daß jeder einfache, nicht-abelsche Normalteiler von $\mathfrak{S}G$ in einer Komponente von $\sigma$ liegt.

Sind $U$ und $V$ zwei verschiedene, einfache, nicht-abelsche Normalteiler von $\mathfrak{S}G$, so liegt $U$ in einer Komponente $U^*$ und $V$ in einer Komponente $V^*$ von $\sigma$. Weiter ist $U \cap V = 1$ und jedes Element aus $U$ ist mit jedem Element aus $V$ vertauschbar. Es gibt Elemente $u \neq 1$ in $U$ und $v \neq 1$ in $V$ mit $o(u) \neq o(v)$. Aus Lemma 2.1 folgt, daß $u$ und $v$ in der gleichen Komponente von $\sigma$ liegen. Aus $u \in U^*$ und $v \in V^*$ folgt dann $U^* = V^*$; und wir haben gezeigt, daß alle einfachen, nicht-abelschen Normalteiler von $\mathfrak{S}G$ in ein und derselben Komponente $K$ von $\sigma$ liegen.

Sei $R$ das Produkt aller einfachen, nicht-abelschen Normalteiler von $\mathfrak{S}G$. Da $\mathfrak{S}G$ nicht-abelsch ist, ist $R \neq 1$. Weiter ist $R$ als charakteristische Untergruppe des Sockels eine charakteristische Untergruppe von $G$. Aus $1 \neq R \subseteq K$ und Lemma 2.5 folgt, daß $K$ von ganz $G$ normalisiert wird, also ein Normalteiler von $G$ ist. Da $R$ nicht auflösbar ist, so ist auch $K$ nicht auflösbar. Eine nicht-auflösbare Komponente von $\sigma$, die gleichzeitig Normalteiler von $G$ ist, kann aber wegen Lemma 3.3 kein echter Normalteiler von $G$ sein. Also ist $K = G$ und $\sigma$ trivial.

FOLGERUNG 3.7. *Ist der Sockel der Gruppe $G$ nicht abelsch, ist $\sigma$ eine normale Partition von $G$ und jede einfache charakteristische Untergruppe von $G$ in einer Komponente von $\sigma$ enthalten, so ist $\sigma$ trivial.*

BEWEIS. Ist $\mathfrak{S}G$ weder abelsch noch einfach, so folgt unsere Behauptung aus Folgerung 3.6. Ist $\mathfrak{S}G$ abelsch oder einfach, so folgt aus unserer Voraussetzung die Einfachheit von $\mathfrak{S}G$. Als einfache charakteristische Untergruppe von $G$ ist $\mathfrak{S}G$ nach Voraussetzung in einer Komponente $S$ von $\sigma$ enthalten. Aus $1 \neq \mathfrak{S}G \subseteq S$ und Lemma 2.5 folgt, daß $S$ von $G$ normalisiert wird, und daß $S$ also ein Normalteiler von $G$ ist. Da $\mathfrak{S}G$ einfach, nicht-abelsch ist, so ist $S$ nicht auflösbar; und Anwendung von Lemma 3.3 ergibt $S = G$ und die Trivialität von $\sigma$.

BEMERKUNG 3.8. Es genügt nicht anzunehmen, daß $\sigma$ normal und $\mathfrak{S}G$ nicht-abelsch ist, um die Trivialität von $\sigma$ darzutun. Denn allerlei einfache Gruppen besitzen normale, nicht-triviale Partitionen.

## 4. Frobenius-Partitionen

Unter einer *Frobenius-Partition* wollen wir eine nicht-triviale, normale Partition verstehen, von deren Komponenten wenigstens eine normalisatorgleich ist. Ist $X$ eine normalisatorgleiche Komponente einer Frobenius-Partition, so gilt $X \cap X^g = 1$ für jedes nicht in $X$ enthaltene Gruppenelement $g$; und diese Bemerkung stellt den Zusammenhang zwischen Frobenius-Partitionen und dem klassischen Satz von FROBENIUS her.

Um die Haupteigenschaften einer Frobenius-Partition bequem aussprechen zu können, sei an den Begriff der *Fittingschen Untergruppe $\mathfrak{F}G$ der Gruppe $G$* erinnert. Diese ist das Produkt aller nilpotenten Normalteiler der Gruppe $G$; und sie ist bekanntlich eine nilpotente charakteristische Untergruppe von $G$.

SATZ 4.1. *Jede Frobenius-Partition $\sigma$ der Gruppe $G$ hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\mathfrak{F}G$ ist eine eigentliche $\sigma$-zulässige Hallsche Untergruppe von $G$.*

(2) *Die normalisatorgleichen Komponenten von $\sigma$ bilden eine Klasse konjugierter Untergruppen von $G$, die mit der Klasse aller Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in $G$ identisch ist.*

(3) *Die Untergruppe $U$ von $G$ ist dann und nur dann in einer normalisatorgleichen Komponente von $\sigma$ enthalten, wenn $U \cap \mathfrak{F}G = 1$ ist.*

(4) *Jeder nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltene Normalteiler von $G$ enthält $\mathfrak{F}G$; und die eigentlichen $\sigma$-zulässigen Normalteiler von $G$ sind in $\mathfrak{F}G$ enthalten.*

(5) *Die normalisatorgleichen Komponenten von $G$ induzieren treu in $\mathfrak{F}G$ Frobenius-Gruppen von Automorphismen und enthalten keine elementarabelschen Untergruppen der Ordnung $p^2$.*

(6) *Enthält die Untergruppe $U$ von $G$ eine normalisatorgleiche Komponente von $\sigma$, so ist $U = \mathfrak{N}U$.*

BEWEIS. Die normalisatorgleichen Komponenten von $\sigma$ sind sämtlich untereinander in $G$ konjugiert [Lemma 1.6]. Da die normalisatorgleichen Komponenten $X$ von $\sigma$ der Bedingung $X \cap X^g = 1$ für jedes nicht in $X$ enthaltene $g$ aus $G$ genügen, so können wir den Satz von FROBENIUS anwenden; vgl. etwa BURNSIDE, p. 334, Theorem IV. Folglich existiert ein zu den normalisatorgleichen Komponenten $X$ von $\sigma$ komplementärer Normalteiler $K$ von $G$ mit folgenden Eigenschaften:

ein von 1 verschiedenes Element aus $G$ gehört dann und nur dann zu $K$, wenn es in keiner der normalisatorgleichen Komponenten von $\sigma$ enthalten ist;

$K$ ist ein Hallscher Normalteiler von $G$;

$K \neq 1$ [Satz 1.7].

Da die nicht in $K$ enthaltenen Elemente aus $G$ sämtlich in den zu $K$ komplementären normalisatorgleichen Komponenten von $\sigma$ enthalten sind, so ist $K$ insbesondere $\sigma$-zulässig. Ist $X$ irgendeine normalisatorgleiche Komponente von $\sigma$, so ist $K \cap X = 1$. Es gibt dann ein Element $x$ in $X$ von Primzahlordnung $p$. Ist $k$ ein mit $x$ vertauschbares Element aus $K$, so haben $x$ und $k$ teilerfremde Ordnung, da $K$ Hallsch ist. Wegen Lemma 2.1 liegen $x$ und $k$ in der gleichen Komponente $X$ von $\sigma$. Also liegt $k$ in $X \cap K = 1$, so daß $k = 1$ ist. Daraus folgt aber, daß $x$ in dem Normalteiler $K$ von $G$ einen Automorphismus von Primzahlordnung induziert, dessen einziges Fixelement die Eins ist. Aus der Existenz eines derartigen Frobenius-Automorphismus folgt nach dem Satz von THOMPSON die Nilpotenz von $K$; vgl. THOMPSON [*1*; p. 579, Theorem 1]. Hieraus folgt insbesondere $K \leq \mathfrak{F}G$. Da $K$ ein Hallscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe $\mathfrak{F}G$ ist, so ist $\mathfrak{F}G = K \otimes J$ das direkte Produkt von Untergruppen $K$ und $J$ teilerfremder Ordnung. Wäre $J \neq 1$, so enthielte $J$ ein Element $j \neq 1$, das nach dem bereits Gezeigten in einer normalisatorgleichen Komponente $Y$ von $\sigma$ liegt. Auch $K$ enthält ein Element $h \neq 1$. Da $h$ und $j$ vertauschbare Elemente teilerfremder Ordnung sind, so

liegen sie in der gleichen Komponente von $\sigma$ [Lemma 2.1]. Aber $K$ ist $\sigma$-zulässig und $K \cap Y = 1$. Dies ist ein Widerspruch, aus dem wir $J = 1$ und $K = \mathfrak{F}G$ erschließen. Damit ist (1) vollständig bewiesen.

Ist die Untergruppe $U$ von $G$ in der normalisatorgleichen Komponente $V$ von $\sigma$ enthalten, so ist ja $V$ ein Komplement von $K = \mathfrak{F}G$ in $G$, woraus $U \cap \mathfrak{F}G \subseteq V \cap \mathfrak{F}G = 1$ und also $U \cap \mathfrak{F}G = 1$ folgt. — Ist umgekehrt $U$ eine $U \cap \mathfrak{F}G = 1$ erfüllende Untergruppe von $G$, so bilden wir die Untergruppe $H = U \cdot \mathfrak{F}G$ von $G$, die $\mathfrak{F}G$ als nilpotenten Hallschen Normalteiler enthält. Sei $X$ eine der normalisatorgleichen Komponenten von $\sigma$. Diese ist ein Komplement von $K = \mathfrak{F}G$ in $G$. Also ist auch $H \cap X$ ein Komplement von $\mathfrak{F}G$ in $H$, wie aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt. Da $U$ und $H \cap X$ Komplemente des nilpotenten Hallschen Normalteilers $\mathfrak{F}G$ von $H$ in $H$ sind, so folgt aus einem Satz von ZASSENHAUS, daß $U$ und $H \cap X$ in $H$ konjugiert sind, vgl. ZASSENHAUS [1; p. 126, Satz 27]. Es gibt also ein $U = (H \cap X)^h$ erfüllendes Element $h$ in $H$. Da $\sigma$ normal ist, so ist $U$ in der normalisatorgleichen Komponente $X^h$ von $\sigma$ enthalten, womit (3) voll bewiesen ist.

Wir haben bereits gezeigt, daß die normalisatorgleichen Komponenten von $\sigma$ eine Klasse konjugierter Untergruppen von $G$ bilden, die sämtlich Komplemente von $K = \mathfrak{F}G$ in $G$ sind. Durch direkte Anwendung von (3) ergibt sich, daß jedes Komplement von $\mathfrak{F}G$ in $G$ in einer normalisatorgleichen Komponente von $\sigma$ enthalten und also auch mit ihr identisch ist. Damit ist auch (2) bewiesen.

Um (4) zu beweisen, betrachten wir zunächst einen nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltenen Normalteiler $M$ von $G$. Ist $t$ irgendein nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltenes Element aus $M$, so liegt $t$ in einer und nur einer Komponente $T$ von $\sigma$. Da $T$ nicht in der [wegen (1)] $\sigma$-zulässigen Untergruppe $\mathfrak{F}G$ enthalten ist, so ist $T \cap \mathfrak{F}G = 1$; und jetzt folgt aus (3) die Normalisatorgleichheit von $T$. Wie schon früher bemerkt, ist 1 das einzige mit $t$ vertauschbare Element aus $\mathfrak{F}G$. — Sind $a$ und $b$ Elemente aus $\mathfrak{F}G$ mit $a^{-1}a^t = b^{-1}b^t$, so ist auch $ba^{-1} = b^t a^{-t} = (ba^{-1})^t$ ein mit $t$ vertauschbares Element aus $\mathfrak{F}G$, woraus $ba^{-1} = 1$ und $a = b$ folgen. Die Abbildung $a \to a^{-1}a^t$ ist also eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{F}G$ in sich; und daraus folgt insbesondere, daß jedes Element aus $\mathfrak{F}G$ die Form $a^{-1}a^t$ mit $a$ in $\mathfrak{F}G$ hat. Ist nun $a$ irgendein Element aus $\mathfrak{F}G$, so enthält der Normalteiler $M$ mit $t$ auch $t^{-a}t = a^{-1}t^{-1}at = a^{-1}a^t$; und hieraus folgt nach dem soeben Bewiesenen $\mathfrak{F}G \subset M$. — Ist insbesondere $M$ ein nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltener, $\sigma$-zulässiger Normalteiler von $G$, so enthält $M$ einmal $\mathfrak{F}G$ und weiter wegen der $\sigma$-Zulässigkeit eine nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltene Komponente $R$ von $\sigma$. Nun ist aber $R$ wegen (3) und (2) ein Komplement von $\mathfrak{F}G$ in $G$, so daß $G = R \cdot \mathfrak{F}G \subseteq M$ und also $G = M$ gilt. Damit ist (4) bewiesen.

Aussage (5) ist im wesentlichen in einem Resultat von BURNSIDE [p. 335/36] enthalten, wenn wir noch an die schon mehrfach gemachte Bemerkung erinnern, daß 1 das einzige Element aus $K$ ist, das mit nicht in $K$ enthaltenen Elementen aus $G$ vertauschbar ist.

Schließlich betrachten wir eine Untergruppe $U$ von $G$, die die normalisatorgleiche Komponente $A$ von $\sigma$ enthält. Wegen (2) ist $A$ ein Komplement

von $\mathfrak{F}G$ in $G$. Also ergibt sich $U = A[U \cap \mathfrak{F}G]$ aus dem Dedekindschen Modulsatz. Also ist $A$ auch ein Komplement des Normalteilers $U \cap \mathfrak{F}G$ von $U$ in $U$. Wegen (1) ist $\mathfrak{F}G$ eine eigentliche Hallsche charakteristische Untergruppe von $G$; und es ist also auch $U \cap \mathfrak{F}G$ eine nilpotente, Hallsche charakteristische Untergruppe von $U$. Sei jetzt $g$ ein Element aus $\mathfrak{N}U$. Dann ist auch $[U \cap \mathfrak{F}G]^g = U \cap \mathfrak{F}G$; und es folgt, daß $A^g$ ein Komplement von $U \cap \mathfrak{F}G$ in $U$ ist. Aus einem Satz von ZASSENHAUS folgt, daß $A$ und $A^g$ in $U$ konjugiert sind; vgl. ZASSENHAUS [p. 126, Satz 27]. Folglich gibt es ein $A^u = A^g$ erfüllendes Element $u$ in $U$. Dann gehört $gu^{-1}$ zu $\mathfrak{N}A = A$ und $g$ gehört zu $Au \subseteq U$. Damit haben wir den Beweis von $U = \mathfrak{N}U$ erbracht.

ZUSATZ 4.2. *Ist $\sigma$ eine Frobenius-Partition von $G$, so ist*

(a) *$\mathfrak{F}G$ eine Komponente von $\sigma$, wenn nicht alle Elemente $\neq 1$ aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$ die gleiche Primzahlordnung haben; und*

(b) *es gibt eine Komponente von $\sigma$, die ein in $\mathfrak{F}G$ enthaltener Normalteiler von $G$ ist, wenn nicht alle Elemente $\neq 1$ aus $\mathfrak{F}G$ die gleiche Primzahlordnung haben.*

BEWEIS. Aus Satz 4.1, (1) folgt die $\sigma$-Zulässigkeit von $\mathfrak{F}G \neq 1$; und aus Folgerung 2.3 folgt, daß $\mathfrak{F}G$ ganz in einer Komponente von $\sigma$ enthalten ist, wenn $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$ keine elementare Primärgruppe ist. Das Zentrum einer nilpotenten Gruppe $\neq 1$ ist aber dann und nur dann keine elementare Primärgruppe, wenn seine von 1 verschiedenen Elemente nicht alle die gleiche Primzahlordnung haben. Da eine $\sigma$-zulässige, von 1 verschiedene Untergruppe dann und nur dann in einer Komponente enthalten ist, wenn sie selbst eine Komponente ist, so ist hiermit der Beweis von (a) erbracht.

Um (b) zu beweisen, nehmen wir an, daß nicht alle Elemente $\neq 1$ aus $\mathfrak{F}G$ die gleiche Primzahlordnung haben. Da $\mathfrak{F}G$ eine von 1 verschiedene nilpotente Gruppe ist, so ist auch $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G \neq 1$. Folglich gibt es ein Element $z$ von Primzahlordnung $p$ in $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$; und dies gehört zu einer Komponente $L$ von $\sigma$, die wegen der $\sigma$-Zulässigkeit von $\mathfrak{F}G$ ganz in $\mathfrak{F}G$ enthalten ist. Sei $P$ die von den sämtlichen Elementen $x$ aus $\mathfrak{F}G$ mit $o(x) \neq p$ erzeugte charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{F}G$. Als charakteristische Untergruppe einer charakteristischen Untergruppe ist $P$ eine charakteristische Untergruppe von $G$; und $P \neq 1$ folgt aus der Voraussetzung, daß nicht alle von 1 verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{F}G$ die gleiche Primzahlordnung $p$ haben. Aus Lemma 2.1 folgt sofort, daß die Elemente aus $\mathfrak{F}G$ mit von $p$ verschiedener Ordnung in derselben Komponente $L$ von $\sigma$ liegen wie $z$. Also gilt sogar $P \subseteq L$. Aus Lemma 2.5 folgt, daß $L$ von $G$ normalisiert wird. Damit haben wir gezeigt, daß die in $\mathfrak{F}G$ enthaltene Komponente $L$ von $\sigma$ ein Normalteiler von $G$ ist, womit wir auch (b) bewiesen haben.

BEMERKUNG 4.3. Es sei $\Phi$ ein endlicher Körper, aber kein Primkörper. Ist $p$ die Charakteristik von $\Phi$, so ist $p^n$ mit $1 < n$ die Anzahl der Elemente in $\Phi$. Die Additionsgruppe $\Phi_+$ von $\Phi$ ist dann eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung $p^n$, in der die Multiplikationsgruppe $\Phi_*$ von $\Phi$ [durch die Abbildungen $x \to xa$] eine zyklische Automorphismengruppe der Ordnung $p^n - 1$

induziert; und nur 1 induziert dabei einen Automorphismus mit von 0 verschiedenem Fixelement.

Unter Benutzung des Holomorphs von $\Phi_+$ konstruiert man nun leicht eine Gruppe $G$ der Ordnung $p^n(p^n-1)$ mit folgenden Eigenschaften:

$G$ besitzt einen elementar-abelschen Normalteiler $K$ der Ordnung $p^n$ mit zyklischer Faktorgruppe $G/K$ der Ordnung $p^n-1$ derart, daß jedes nicht in $K$ enthaltene Element in $K$ einen Automorphismus ohne von 1 verschiedene Fixelemente induziert; und die Elemente einer erzeugenden Restklasse von $G/K$ normalisieren keine der zyklischen Untergruppen $\neq 1$ von $K$.

Man erhält dann eine normale Partition $\sigma$ von $G$, wenn man die sämtlichen zyklischen Untergruppen der Ordnung $p$ und die sämtlichen zyklischen Untergruppen der Ordnung $p^n-1$ als Komponenten von $\sigma$ wählt. Die letzteren sind dann normalisatorgleiche Komplemente von $K$ in $G$. Keine der zyklischen Untergruppen der Ordnung $p$ ist ein Normalteiler von $G$; und nun sieht man ein, daß $\sigma$ eine Frobenius-Partition von $G$ ist, von deren Komponenten keine einzige ein Normalteiler ist. Dies zeigt die Unentbehrlichkeit der ad (a) und ad (b) in Zusatz 4.2 gemachten Zusatzvoraussetzungen.

Da eine nilpotente Gruppe dann und nur dann nicht primär ist, wenn ihr Zentrum nicht primär ist, so genügt es ad (a) vorauszusetzen, daß $\mathfrak{Z}G$ nicht primär ist, was bei Anwendungen wichtig ist.

Im folgenden wird es sich als bequem erweisen, *die von einer Partition in den Untergruppen induzierten Partitionen* zu betrachten. Diese werden folgendermaßen definiert: Ist $\sigma$ eine Partition und $U \neq 1$ eine Untergruppe der Gruppe $G$, so bestehe $\sigma \cap U$ aus allen $X \cap U \neq 1$ mit $X$ aus $\sigma$. Es ist klar, daß $\sigma \cap U$ eine Partition von $U$ ist, und daß $\sigma \cap U$ normal ist, wenn $\sigma$ normal ist.

LEMMA 4.4. *Ist $\sigma$ eine normale Partition von $G$ und $K \neq 1$ ein $\sigma$-zulässiger Normalteiler von $G$, so sind die folgenden Eigenschaften der nicht in $K$ enthaltenen Komponente $E$ von $\sigma$ äquivalent:*

(a) $$K \cap \mathfrak{C}E = 1;$$

(b) $$(o(K),\ o(E)) = 1;$$

(c) $$E = \mathfrak{N}E.$$

BEWEIS. Aus der Zulässigkeit von $K$ und $E \subsetneqq K$ folgern wir $K \cap E = 1$. Weiter ergibt sich aus Lemma 3.1, (b) daß $\mathfrak{C}E \cap K = K \cap \mathfrak{N}E$ ist.

Ist zunächst $E = \mathfrak{N}E$, so wird also $K \cap \mathfrak{C}E = K \cap \mathfrak{N}E = K \cap E = 1$, so daß (a) aus (c) folgt. — Gilt (b) nicht, so besitzen $o(K)$ und $o(E)$ einen gemeinsamen Primteiler $p$. Wir betrachten eine $p$-Sylow-Untergruppe $A$ von $E$, die dann natürlich von 1 verschieden ist. Weiter liegt $A$ in einer $p$-Sylow-Untergruppe $P$ von $G$. Da $K$ ein Normalteiler von $G$ ist, so ist $B = K \cap P$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $K$; und $B \neq 1$, da $p$ ein Teiler von $o(K)$ ist. Da $K$ ein Normalteiler von $G$ ist, so ist auch $B$ ein Normalteiler von $P$. Da $P$ eine $p$-Gruppe und $B$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von $P$ ist, so wird $B \cap \mathfrak{Z}P \neq 1$. Ist $b \neq 1$ ein Element aus $B \cap \mathfrak{Z}P$, so wird insbesondere $A$ von $b$ zentralisiert; und aus $1 < A \subseteq E$ und Lemma 3.1, (a) folgt dann, daß

die Komponente $E$ von $\sigma$ von $b$ normalisiert wird. Da $b$ in $K$ liegt, so wird $1 \neq \mathfrak{N}E \cap K = K \cap \mathfrak{C}E$. Mit (b) ist also auch (a) falsch; d.h. aus (a) folgt (b).

Wir nehmen die Gültigkeit von (b) an. Ist dann $t$ ein Element aus $K \cap \mathfrak{C}E$, so ist $t$ mit jedem Element aus $E$ vertauschbar und die Ordnungen sind teilerfremd. Anwendung von Lemma 2.1 zeigt, daß $t$ und jedes Element aus $E$ in der gleichen Komponente von $\sigma$ liegen. Also liegt $t$ in $K \cap E = 1$, so daß $t = 1$ ist. Damit haben wir (a) aus (b) hergeleitet und die Äquivalenz von (a) und (b) dargetan.

Wir nehmen jetzt die Gültigkeit der äquivalenten Eigenschaften (a) und (b) und die Ungültigkeit von (c) an, so daß $E \neq \mathfrak{N}E$ wird. Weiter ist $\mathfrak{N}E \cap K = K \cap \mathfrak{C}E = 1$. Setzen wir also $H = K \cdot \mathfrak{N}E$, so sind $H/K$ und $\mathfrak{N}E$, $KE/K$ und $E$ im wesentlichen identisch. Es folgt, daß $KE$ ein echter Normalteiler von $H$ ist.

Es ist klar, daß $K$ ein eigentlicher $(\sigma \cap KE)$-zulässiger Normalteiler von $KE$ ist; und aus $K \cap \mathfrak{N}E = 1$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgern wir, daß $KE \cap \mathfrak{N}E = E(K \cap \mathfrak{N}E) = E$ eine normalisatorgleiche Komponente von $\sigma \cap KE$ ist. Da $E$ ein Komplement von $K$ in $KE$ ist, so ergibt sich aus Satz 4.1, daß $K = \mathfrak{F}(KE)$ ein nilpotenter Hallscher Normalteiler von $KE$ ist. Aus $K \cap \mathfrak{C}E = 1$ [und $E \neq 1$] folgt dann die Nichtnilpotenz von $KE$, da ja aus der Nilpotenz von $KE$ zusammen mit der Teilerfremdheit von $o(K)$ und $o(E)$ [Bedingung (b)] die elementweise Vertauschbarkeit von $K$ und $E$ folgen würde. Anwendung von Satz 4.1, (2), (3) ergibt weiter, daß die nicht in $K$ liegenden Elemente aus $KE$ sämtlich in zu $E$ [in $KE$] konjugierten Untergruppen von $KE$ liegen. Da mit $E$ auch alle zu $E$ konjugierten Untergruppen Komponenten der normalen Partition $\sigma$ sind, so ist auch $KE$ eine $\sigma$-zulässige Untergruppe von $G$.

Aus dem Gezeigten geht hervor, daß $KE$ ein nicht-nilpotenter, $(\sigma \cap H)$-zulässiger, echter Normalteiler von $H$ ist*). Aus Lemma 3.3 ergibt sich dann die Existenz einer Primzahl $p$ mit folgenden Eigenschaften:

alle nicht in $KE$ enthaltenen Elemente aus $H$ haben die Ordnung $p$;

$EK$ und $H$ sind Erweiterungen einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe;

$EK$ wird von den Elementen mit von $p$ verschiedener Ordnung erzeugt;

$[H:EK] = p$.

Da $KE$ eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe und $K = \mathfrak{F}(KE)$ ist, so ist $KE/K \cong E$ eine $p$-Gruppe. Da $K$ ein Hallscher Normalteiler von $KE$ ist, so ist $p$ kein Teiler von $o(K)$. Aus $[H:KE] = p$ folgt weiter, daß $H/K$ eine $p$-Gruppe ist. Ist also $Q$ irgendeine $p$-Sylow-Untergruppe von $H$, so ist $Q$ sogar ein Komplement von $K$ in $H$. Elemente aus $Q$ und $K$ haben teilerfremde Ordnung, so daß aus ihrer Vertauschbarkeit wegen Lemma 2.1 die Zugehörigkeit zur gleichen Komponente von $\sigma$ folgt. Da $K$ zulässig und $K \cap Q = 1$ ist, so folgt: ist $x \neq 1$ ein Element aus $Q$, so ist 1 das einzige

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]. Inzwischen hat O. Kegel die Nichtexistenz derartiger Normalteiler bewiesen, so daß bei Benutzung des Kegelschen Satzes sich das zu Beweisende erübrigen würde.

Element aus $K$, mit dem $x$ vertauschbar ist; jedes von 1 verschiedene Element aus der $p$-Gruppe $Q$ induziert also in $K$ einen Automorphismus, dessen einziges Fixelement gleich 1 ist. Aus einem Resultat von BURNSIDE folgt nun, daß $Q$ eine und nur eine zyklische Untergruppe der Ordnung $p$ enthält; vgl. BURNSIDE, p. 335. Aus $Q \cap KE \neq 1$ folgt dann, daß $KE$ alle Elemente der Ordnung $p$ aus $Q$ enthält. Da dieses Resultat für alle $p$-Sylow-Untergruppen von $H$ gilt, so enthält $KE$ alle Elemente der Ordnung $p$ aus $H$. Nun ist aber $KE < H$ und jedes nicht in $KE$ enthaltene Element aus $H$ hat die Ordnung $p$, liegt also in $KE$. Dies ist ein Widerspruch; und es folgt also $E = \mathfrak{N}E$ und die Äquivalenz von (a), (b), (c).

SATZ 4.5. *Die folgenden Eigenschaften der normalen Partition $\sigma$ von $G \neq 1$ sind äquivalent:*

(1) *$\sigma$ ist eine Frobenius-Partition von $G$.*

(2) *Es gibt einen eigentlichen, nilpotenten, Hallschen, $\sigma$-zulässigen Normalteiler von $G$.*

(3) *Es gibt einen $\sigma$-zulässigen Normalteiler $K \neq 1$ von $G$ mit einem $o(K)$ nicht teilenden Primteiler von $[G:K]$.*

(4) *Es gibt einen eigentlichen, nilpotenten, Hallschen Normalteiler von $G$; und zu jeder Komponente $X$ von $\sigma$ gibt es eine $[G:X]$, aber nicht $o(X)$ teilende Primzahl.*

BEWEIS. Ist $\sigma$ eine Frobenius-Partition von $G$, so ist $\mathfrak{H}G$ ein nilpotenter, Hallscher, eigentlicher, $\sigma$-zulässiger Normalteiler von $G$ [Satz 4.1, (1)]. Also ist (2) eine Folge von (1); und es ist klar, daß (3) eine Folge von (2) ist. Gibt es einen $\sigma$-zulässigen Normalteiler $K \neq 1$ von $G$ mit einem $o(K)$ nicht teilenden Primteiler $p$ von $[G:K]$, so ist $K$ ein eigentlicher Normalteiler von $G$; und es gibt ein Element $g$ der Ordnung $p$ in $G$, das gewiß nicht in $K$ enthalten ist. Dieses Element $g$ liegt dann in einer Komponente $E$ von $\sigma$, die nicht in $K$ enthalten sein kann. Ist $k$ ein mit $g$ vertauschbares Element aus $K$, so folgt aus der Teilerfremdheit von $o(K)$ und $p = o(g)$, daß $k$ und $g$ in der gleichen Komponente von $\sigma$ liegen [Lemma 2.1]. Also liegt $k$ mit $g$ in $E$. Da aber $K$ zulässig ist und $E$ nicht enthält, so liegt $k$ in $K \cap E = 1$, woraus $k = 1$ folgt. Mithin ist sicherlich auch $K \cap \mathfrak{C}E = 1$; und wir können $E = \mathfrak{N}E$ aus Lemma 4.4 folgern. Also ist $\sigma$ eine Frobenius-Partition und die Äquivalenz der Bedingungen (1) bis (3) ist bewiesen.

Ist $\sigma$ eine Frobenius-Partition, so folgern wir wieder aus Satz 4.1, (1), daß $\mathfrak{H}G$ ein eigentlicher, nilpotenter, Hallscher, $\sigma$-zulässiger Normalteiler von $G$ ist. Damit ist bereits die erste Hälfte von Bedingung (4) dargetan. Ist $X$ irgendeine Komponente von $\sigma$, so ist entweder $X \leqq \mathfrak{H}G$ oder $X \cap \mathfrak{H}G = 1$. Im ersten Falle ist $o(X)$ zu jedem der Primteiler von $[G:\mathfrak{H}G]$ teilerfremd; und diese sind auch Primteiler von $[G:X]$. Im zweiten Fall ist $X \cong X \cdot \mathfrak{H}G/\mathfrak{H}G$; und $o(X)$ ist zu jedem Primteiler von $o(\mathfrak{H}G) \neq 1$ teilerfremd. Diese Primteiler sind aber Teiler von $[G:X]$; und damit ist auch die Gültigkeit der zweiten Hälfte der Bedingung (4) dargetan.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (4) an. Dann gibt es einen eigentlichen, nilpotenten, Hallschen Normalteiler $K$ von $G$. Ist $K$ selbst $\sigma$-zulässig, so ist Bedingung (2) erfüllt. Wir wollen also annehmen, daß $K$ nicht $\sigma$-zulässig ist. Dann gibt es eine Komponente $W$ von $\sigma$ mit $1 \subset W \cap K \subset W$. Da $K$ ein Hallscher Normalteiler von $G$ ist, so ist $K \cap W$ ein Hallscher Normalteiler von $W$; und aus der Nilpotenz von $K$ folgt die von $K \cap W$. Da $K$ eine von 1 verschiedene nilpotente Gruppe ist, so ist auch $\mathfrak{Z}K \neq 1$. Als charakteristische Untergruppe des Normalteilers $K$ von $G$ ist auch $\mathfrak{Z}K$ ein Normalteiler von $G$.

Da $K \cap W$ von $\mathfrak{Z}K$ normalisiert wird, so folgt $\mathfrak{Z}K \subseteq \mathfrak{N}W$ aus Lemma 2.5. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{Z}K$ sogar in $W$ enthalten ist, unterscheiden wir zwei Fälle.

*Fall 1.* $W$ ist nilpotent.

Da $W \cap K$ ein eigentlicher Hallscher Normalteiler von $W$ ist, so ist $W$ keine $p$-Gruppe. Da die nilpotente Gruppe $W$ von dem abelschen Normalteiler $\mathfrak{Z}K$ von $G$ normalisiert wird, so ist das Produkt $V = W \cdot \mathfrak{Z}K$ als Produkt nilpotenter Normalteiler von $V$ selbst nilpotent. Diese nilpotente Gruppe ist aber keine $p$-Gruppe, da ja $W$ keine $p$-Gruppe ist. Also ist auch ihr Zentrum $\mathfrak{Z}V$ keine $p$-Gruppe. Anwendung von Folgerung 2.3 zeigt, daß $V$ ganz in einer Komponente von $\sigma$ enthalten ist. Da aber $V$ die Komponente $W$ von $\sigma$ enthält, so wird $W = V$, so daß $\mathfrak{Z}K \subseteq W$ ist.

*Fall 2.* $W$ ist nicht nilpotent.

Wir betrachten die normale Partition $\sigma \cap V$ von $V = W \cdot \mathfrak{Z}K$. Wäre $W \neq V$, so wäre $W$ ein eigentlicher $(\sigma \cap V)$-zulässiger, aber nicht nilpotenter Normalteiler von $V$, sogar eine Komponente. Wir können also Lemma 3.3 anwenden. Folglich gibt es eine Primzahl $p$ mit folgenden Eigenschaften:

alle nicht in $W$ enthaltenen Elemente aus $V$ haben die Ordnung $p$; und $W$ [sowohl wie $V$] ist eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe.

Aus $W \subset V$ folgt die Existenz eines Elements $t$ in $\mathfrak{Z}K$, das nicht in $W$ enthalten ist. Dieses hat gewiß die Ordnung $p$. Ist $k$ ein Element aus $W \cap K$, so liegt auch $kt$ in $V$, aber nicht in $W$. Folglich ist $o(kt) = p$. Da aber $kt = tk$ ist, so ist sogar $1 = (kt)^p = k^p$; und damit haben wir $(W \cap K)^p = 1$ gezeigt. Da der Hallsche Normalteiler $W \cap K$ von $W$ eine $p$-Gruppe ist, so ist $W \cap K$ überdies die [eindeutig bestimmte] $p$-Sylow-Untergruppe von $W$. Da $W$ eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe ist, so ist $W$ das Produkt eines nilpotenten Normalteilers mit dem $p$-Normalteiler $W \cap K$. Also ist $W$ nilpotent im Widerspruch zu der Annahme des zweiten Falls. Aus diesem Widerspruch folgt das gewünschte $V = W$, so daß wir in beiden Fällen $\mathfrak{Z}K \subseteq W$ gezeigt haben.

Da $\mathfrak{Z}K$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von $G$ ist, so folgt aus Lemma 2.5, daß die Komponente $W$ ein Normalteiler von $G$ ist. Da es einen $o(W)$ nicht teilenden Primteiler von $[G:W]$ wegen (4) gibt, so gilt sicherlich (3); und damit haben wir allgemein aus (4) die äquivalenten Bedingungen (1) bis (3) hergeleitet.

BEMERKUNG 4.6. Es ist unmöglich, die zweite Hälfte der Bedingung (4) durch die schwächere Forderung der Nicht-Trivialität von $\sigma$ zu ersetzen. Dies läßt sich etwa durch das folgende Beispiel belegen:

es seien $p$ und $q$ Primzahlen und zwar sei $p$ ein Teiler von $q-1$. Dann gibt es eine zu $q$ teilerfremde Zahl $e$, deren multiplikative Ordnung modulo $q$ genau $p$ ist. Die Gruppe $G$ werde durch Elemente $a, b, c$ erzeugt, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$a^q = b^p = c^p = 1;$$

$$ab = ba, \qquad bc = cb, \qquad c^{-1}ac = a^e.$$

Dann ist $\{ab\} = \{a, b\}$ ein zyklischer Normalteiler der Ordnung $pq$; und alle nicht in $\{ab\}$ gelegenen Elemente aus $G$ haben die Ordnung $p$. Die gesuchte normale Partition $\sigma$ von $G$ besteht aus dem Normalteiler $\{ab\}$ und sämtlichen zyklischen Untergruppen der Ordnung $p$, die nicht in $\{ab\}$ liegen. Weiter ist $\{a\}$ ein zyklischer Normalteiler der Ordnung $q$ und des Index $p^2$, der also Hallsch ist. Es ist also die erste, aber nicht die zweite Hälfte der Bedingung (4) erfüllt, da ja $[G:\{ab\}] = p$ ein Teiler von $o(\{ab\})$ ist.

VERFEINERUNGEN UND VERSCHMELZUNGEN. Sind $\sigma'$ und $\sigma''$ Partitionen der Gruppe $G$, ist weiter jede Komponente von $\sigma'$ gleichzeitig $\sigma''$-zulässig, so möge $\sigma''$ *eine Verfeinerung von* $\sigma'$ *und* $\sigma'$ *eine Verschmelzung von* $\sigma''$ genannt werden.

SATZ 4.7. *Sind* $\sigma'$ *und* $\sigma''$ *nicht-triviale Partitionen der Gruppe* $G$, *ist weiter* $\sigma''$ *eine Verfeinerung von* $\sigma'$, *so gilt:*

(a) *Ist* $\sigma'$ *eine Frobenius-Partition von* $G$, *so sind die normalisatorgleichen Komponenten von* $\sigma'$ *auch Komponenten von* $\sigma''$.

(b) *Ist* $\sigma''$ *eine Frobenius-Partition von* $G$, *so sind die normalisatorgleichen Komponenten von* $\sigma''$ *in normalisatorgleichen Komponenten von* $\sigma'$ *enthalten.*

(c) *Sind* $\sigma'$ *und* $\sigma''$ *normale Partitionen von* $G$, *so ist* $\sigma'$ *dann und nur dann eine Frobenius-Partition von* $G$, *wenn* $\sigma''$ *eine Frobenius-Partition ist* [*und in diesem Falle haben* $\sigma'$ *und* $\sigma''$ *dieselben normalisatorgleichen Komponenten*].

BEWEIS. Ist $\sigma'$ eine Frobenius-Partition von $G$, so folgern wir aus Satz 4.1, daß $\mathfrak{F}G$ eine $\sigma'$-zulässige, Hallsche, eigentliche charakteristische Untergruppe von $G$ ist, und daß die Klasse der normalisatorgleichen Komponenten von $\sigma'$ genau die Klasse der [untereinander konjugierten] Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in $G$ ist.

Wir zeigen zunächst die Existenz einer normalen Verfeinerung von $\sigma''$ — diesen Existenzsatz verdanken wir Herrn O. H. KEGEL. Jeder Automorphismus von $G$ bildet $\sigma''$ auf eine Partition von $G$ ab. Also ist für jedes $g$ aus $G$ auch $\sigma''^g$ eine Partition von $G$. Sei $\sigma$ die Menge der von 1 verschiedenen Untergruppen von $G$, die die Form $\bigcap_g X(g)$ haben, wo $X(g)$ für jedes $g$ aus $G$ eine wohlbestimmte Komponente von $\sigma''^g$ [oder gleichwertig: $X(g)^{g^{-1}}$ eine wohlbestimmte Komponente von $\sigma''$] ist. Ist $a \neq 1$ ein Element aus $G$, so gibt es für jedes $g$ aus $G$ eine und nur eine $a$ enthaltende Komponente $A(g)$

von $\sigma''^{g}$; und der Durchschnitt dieser $A(g)$ ist eine $a$ enthaltende Untergruppe aus $\sigma$. Man überzeugt sich jetzt mühelos, daß $\sigma$ eine Partition von $G$ und sogar normal ist, und daß weiter $\sigma$ eine Verfeinerung von $\sigma''$ ist [denn jede Komponente von $\sigma$ ist in einer und nur einer Komponente von $\sigma''$ enthalten]. Da $\sigma$ eine Verfeinerung der Verfeinerung $\sigma''$ von $\sigma'$ ist, so ist $\sigma$ natürlich auch eine Verfeinerung von $\sigma'$. Also ist jede $\sigma'$-zulässige Untergruppe von $G$ auch $\sigma$-zulässig; und dies gilt insbesondere von $\mathfrak{F}G$ und seinen Komplementen.

Sei nun $A$ eine normalisatorgleiche Komponente von $\sigma'$. Wäre $A$ keine Komponente von $\sigma''$, so wäre $A$ a fortiori auch keine Komponente von $\sigma$; und es gäbe dann eine Komponente $B$ von $\sigma$, die eine echte Untergruppe von $A$ ist. Wäre $B=\mathfrak{N}B$, so würde diese Komponente $B$ der normalen Partition $\sigma$ der Bedingung $B\cap B^{g}=1$ für jedes nicht in $B$ enthaltene Element $g$ aus $G$ genügen. Anwendung des klassischen Satzes von Frobenius zeigt die Existenz eines zu $B$ komplementären Normalteilers $K$ von $G$, der nach dem Satz von Thompson nilpotent ist; vgl. Thompson [p. 1099, Theorem 1]. Dann ist $K$ in $\mathfrak{F}G$ enthalten, so daß $o(B)=[G:K]$ ein Vielfaches von $[G:\mathfrak{F}G]=o(A)$ ist. Aus $B<A$ folgt dann sogar der Widerspruch $A=B$; und damit haben wir $B\neq\mathfrak{N}B$ gezeigt.

Da $\sigma'$ als Frobenius-Partition normal ist, so folgt aus Lemma 2.5 und $B\leqq A$ sogar $B<\mathfrak{N}B\leqq\mathfrak{N}A=A$.

Ist irgendein Element $t$ nicht in $B$ enthalten, so ist auch keine von 1 verschiedene Potenz von $t$ in der Komponente $B$ enthalten. Also folgt aus $B\neq\mathfrak{N}B$ die Existenz eines Elements $r$ von Primzahlordnung $o(r)=p$, das in $\mathfrak{N}B$, aber nicht in $B$ liegt. Ist $w\neq 1$ ein Element aus $B\cap\mathfrak{C}r$, so folgt aus Lemma 2.1 [und der Nichtzugehörigkeit von $r$ zu $B$], daß $r$ und $w$ die gleiche Primzahlordnung $p$ haben, so daß $A$ die elementar-abelsche Untergruppe $\{r, w\}$ der Ordnung $p^2$ enthält. Da aber $A$ eine normalisatorgleiche Komponente der Frobenius-Partition $\sigma'$ von $G$ ist, so ist dies wegen Satz 4.1, (5) unmöglich. Folglich ist $B\cap\mathfrak{C}r=1$.

Sei weiter $v$ ein mit $r$ vertauschbares Element aus $B\cdot\mathfrak{F}G$. Dann hat $v$ die Form $v=bf$ mit $b$ aus $B$ und $f$ aus $\mathfrak{F}G$. Da aber auch $b^r$ zu $B$ und $f^r$ zu $\mathfrak{F}G$ gehört, so folgt aus $bf=v=v^r=b^rf^r$ und $1=B\cap\mathfrak{F}G$ sogar $b=b^r$ und $f=f^r$. Dies zieht nach dem soeben Gezeigten $b=1$ nach sich. Da aber $r$ ein Element aus der normalisatorgleichen Komponente $A$ von $\sigma'$ ist, während $f$ in $\mathfrak{F}G$ liegt, so muß [wegen Satz 4.1, (5)] auch $f=1$ sein. Also ist $v=1$; und wir haben gezeigt, daß $r$ einen sog. Frobenius-Automorphismus in $B\cdot\mathfrak{F}G$ induziert. Hieraus folgt nach dem Satz von Thompson die Nilpotenz von $B\cdot\mathfrak{F}G$; vgl. Thompson [p. 1099, Theorem 1]. Da $\mathfrak{F}G$ ein Hallscher Normalteiler von $G$ ist, so folgt sogar die Vertauschbarkeit eines jeden Elements aus $B$ mit einem jeden Element aus $\mathfrak{F}G$; und dies ist unmöglich, da die Elemente aus $B<A$ in $\mathfrak{F}G$ [wegen Satz 4.1, (5)] Frobenius-Automorphismen induzieren. Damit sind wir zu einem Widerspruch geführt worden, aus dem folgt, daß $A$ eine Komponente von $\sigma''$ ist; und damit ist die Gültigkeit von (a) dargetan.

Sei jetzt $\sigma''$ eine Frobenius-Partition von $G$ und $A$ eine normalisatorgleiche Komponente von $\sigma''$. Da $\sigma''$ eine Verfeinerung von $\sigma'$ ist, so ist $A$ in einer

und nur einer Komponente $B$ von $\sigma'$ enthalten. Aus der $\sigma''$-Zulässigkeit von $B$ folgt $B=\mathfrak{N}B$ wegen Satz 4.1, (6), womit (b) bewiesen ist.

Wir nehmen schließlich an, daß sowohl $\sigma'$ wie auch $\sigma''$ normal sei. Ist eine von diesen beiden Partitionen eine Frobenius-Partition, so folgt aus (a) bzw. (b), daß auch die andere eine ist; und dann folgt aus (a), daß beide Partitionen die gleichen normalisatorgleichen Komponenten besitzen. Damit ist auch (c) bewiesen.

BEMERKUNG 4.8. Daß (b) nicht in der gleichen Schärfe wie (a) bewiesen werden kann, zeigt das folgende Beispiel. Es seien $p$ und $q$ Primzahlen, $q$ ein Teiler von $p-1$ und $e$ eine zu $p$ teilerfremde Zahl, deren multiplikative Ordnung modulo $p$ genau $q$ ist. Weiter sei $P$ eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung $p^2$; und $G$ entstehe aus $P$ durch Adjunktion eines Elements $f$, das den Bedingungen

$$f^q=1, \quad f^{-1}xf=x^e \quad \text{für jedes } x \text{ aus } P$$

genügt. Eine Frobenius-Partition $\sigma''$ von $G$ besteht dann aus allen zyklischen Untergruppen $\neq 1$ von $G$, da diese ja sämtlich Primzahlordnung [$p$ oder $q$] haben. Ist $t\neq 1$ ein Element aus $P$, so sei $\sigma'$ die aus $\{t, f\}$ und allen nicht in $\{t, f\}$ enthaltenen zyklischen Untergruppen bestehende Partition von $G$. Es ist klar, daß $\sigma'$ eine Verschmelzung von $\sigma''$ ist, daß $\sigma'$ und $\sigma''$ nicht die gleichen normalisatorgleichen Komponenten haben [und daß $\sigma'$ nicht normal ist].

FOLGERUNG 4.9 [O. H. KEGEL]. *Die einzige Partition einer Frobenius-Gruppe von Automorphismen [einer normalisatorgleichen Komponente einer Frobenius-Partition] ist die triviale.*

BEWEIS. Es ist eine Folge von Satz 4.1, (5), daß jede normalisatorgleiche Komponente einer Frobenius-Partition auch eine Frobenius-Gruppe von Automorphismen ist. Ist umgekehrt $A$ eine Frobenius-Gruppe von Automorphismen der Gruppe $B$, so ist $A$ eine Untergruppe und $B$ ein Normalteiler des Holomorph von $B$. Wir bilden die Untergruppe $BA$ des Holomorph von $B$. Bekanntlich besteht dann eine Frobenius-Partition $\sigma$ von $G$ aus $B$ und den zu $A$ in $G$ konjugierten Untergruppen. Ist $\sigma^*$ eine Partition von $A$, so sei $\sigma'$ die aus den von $A$ verschiedenen Untergruppen von $\sigma$ und aus den Untergruppen in $\sigma^*$ bestehende Untergruppenmenge. Dann ist natürlich $\sigma'$ eine Partition von $G$ und eine Verfeinerung von $\sigma$. Aus Satz 4.7, (a) folgt $\sigma=\sigma'$ und die Trivialität von $\sigma^*$.

BEMERKUNG 4.10. Die Eigenschaft, daß Frobenius-Gruppen von Automorphismen nur die triviale Partition besitzen, geht über die in Satz 4.1, (5) genannte Burnsidesche Eigenschaft hinaus, daß ihre Sylow-Untergruppen höchstens eine Untergruppe von Primzahlordnung enthalten. Sind nämlich $p, q$ Primzahlen mit $q|p-1$, so gibt es eine nicht abelsche Gruppe $G$ der Ordnung $pq$. Diese besitzt einen Normalteiler der Ordnung $p$ und ihre Elemente haben die Ordnungen $1, p, q$. Die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung bilden dann eine Frobenius-Partition von $G$ und diese Gruppe hat offenbar die erwähnte Burnsidesche Eigenschaft.

## 5. Die normalen, nicht-einfachen Partitionen

Es liegt nahe, die Partition $\sigma$ der Gruppe $G$ *einfach* zu nennen, wenn es keine eigentlichen, $\sigma$-zulässigen Normalteiler von $G$ gibt. Natürlich sind alle trivialen Partitionen einfach, ebenso die Partitionen einfacher Gruppen. Wir werden uns hier mit den normalen, nicht-einfachen Partitionen befassen. Aus Satz 4.1 ergibt sich, daß die Frobenius-Partitionen Beispiele solcher normaler, nicht-einfacher Partitionen sind; und wir werden deshalb die Frobenius-Partitionen von unseren Überlegungen ausschließen können.

SATZ 5.1. *Ist $\sigma$ eine normale Partition und $K$ ein eigentlicher $\sigma$-zulässiger Normalteiler von $G$, so gilt:*

(a) *$\sigma$ ist dann und nur dann keine Frobenius-Partition, wenn jeder Primteiler von $[G:K]$ auch ein Teiler von $o(K)$ ist.*

(b) *Ist $\sigma$ keine Frobenius-Partition, so haben alle nicht in $K$ enthaltenen Elemente die gleiche Primzahlordnung.*

(c) *Ist $\sigma$ keine Frobenius-Partition und $G$ nicht primär, so ist $[G:K]$ eine Primzahl $p$; $K$ und $G$ sind Erweiterungen nilpotenter*) durch $p$-Gruppen; $K$ wird von allen $g \in G$ mit $o(g) \neq p$ erzeugt und ist eine Komponente von $\sigma$.*

BEWEIS. Gibt es einen $o(K)$ nicht teilenden Primteiler von $[G:K]$, so folgt aus Satz 4.5, (3), daß $\sigma$ eine Frobenius-Partition ist. Ist also $\sigma$ keine Frobenius-Partition, so ist jeder Primteiler von $[G:K]$ auch ein Teiler von $o(K)$.

Ist umgekehrt $\sigma$ eine Frobenius-Partition von $G$, so folgern wir $K \subseteq \mathfrak{F}G$ aus Satz 4.1, (4). Wegen Satz 4.1, (1) ist $\mathfrak{F}G$ ein eigentlicher Hallscher Normalteiler von $G$. Es gibt also einen Primteiler $p$ von $[G:\mathfrak{F}G]$, und a fortiori von $[G:K]$, der $o(\mathfrak{F}G)$, und a fortiori $o(K)$, nicht teilt. Damit ist (a) bewiesen.

Sei jetzt $\sigma$ keine Frobenius-Partition und $L$ eine nicht in $K$ enthaltene Komponente von $\sigma$. Dann ist $K \cap L = 1$ wegen der Zulässigkeit von $K$; und hieraus folgt, daß $o(L)$ ein Teiler von $[G:K]$ ist. Es gibt einen Primteiler $p$ von $o(L)$; und dieser ist als Primteiler von $[G:K]$ wegen (a) auch ein Teiler von $o(K)$. Weiter enthält $L$ ein Element $a$ der Ordnung $p$; und dieses ist in einer $p$-Sylow-Untergruppe $A$ von $G$ enthalten. Da $K$ ein Normalteiler von $G$ ist, so ist $K \cap A$ ein Normalteiler von $A$ und eine $p$-Sylow-Untergruppe von $K$. Da $p$ ein Teiler von $o(K)$ ist, so ist $K \cap A \neq 1$; und nun folgt aus den bekannten Eigenschaften der $p$-Gruppen auch $1 \neq \mathfrak{Z}A \cap (K \cap A) = \mathfrak{Z}A \cap K$. Ist $t \neq 1$ ein Element aus $\mathfrak{Z}A \cap K$, so gilt $ta = at$; und aus Lemma 3.1, (a) folgt die Zugehörigkeit von $t$ zu $K \cap \mathfrak{N}L$. Also ist $K \cap \mathfrak{N}L \neq 1$; und es ergibt sich aus Lemma 3.1, (c) die Existenz einer $L^q = 1$ erfüllenden Primzahl $q$ [da $L$ das Element $a$ der Ordnung $p$ enthält, so ist $p = q$]. Damit haben wir gezeigt, daß es zu jeder nicht in $K$ enthaltenen Komponente $L$ von $\sigma$ eine $L^p = 1$ erfüllende Primzahl $p$ gibt. Da jedes nicht in $K$ enthaltene Element von $G$

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]. O. KEGEL hat inzwischen die Nilpotenz von $K$ bewiesen.

in einer Komponente von $\sigma$ liegt, so ergibt sich sogar das folgende Zwischenresultat:

(b*) *Ist $\sigma$ keine Frobenius-Partition, so haben alle nicht in $K$ enthaltenen Elemente Primzahlordnung und alle nicht in $K$ enthaltenen Komponenten sind primär.*

Wir nehmen im folgenden an, daß $\sigma$ keine Frobenius-Partition und $G$ keine Primärgruppe ist. Dann ist auch $K$ keine Primärgruppe. Denn sonst wäre $K$ ja eine $p$-Gruppe; und hieraus folgte wegen (a), daß auch $G/K$ und also auch $G$ selbst eine $p$-Gruppe wäre. Sei nun $p$ irgendein Primteiler von $[G:K]$ und $P$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $G$. Dann ist $K \cap P$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $K$ und $KP/K \neq 1$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $G/K$. Aus (b) folgt dann, daß alle nicht in $K$ enthaltenen Elemente aus $H = KP$ die Ordnung $p$ haben. Die von den sämtlichen Elementen $h$ aus $H$ mit $o(h) \neq p$ erzeugte charakteristische Untergruppe $V$ von $H$ ist also in $K$ enthalten. Da $K$ keine $p$-Gruppe ist, so ist auch $H$ keine $p$-Gruppe und es wird $1 < V \leqq K < H$. Anwendung eines Satzes von HUGHES-THOMPSON ergibt $[H:V] = p$; vgl. HUGHES-THOMPSON [p. 1099, Theorem 1]. Folglich wird $K = V$ und $p = [H:K] = [KP:K]$. Da aber $KP/K$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $G/K$ ist, so ist $p$ selbst die höchste $[G:K]$ teilende Potenz von $p$; und damit haben wir gezeigt, daß $[G:K]$ quadratfrei ist.

Sei überdies $G/K$ nicht primär. Dann ist $[G:K]$ eine durch wenigstens zwei verschiedene Primzahlen teilbare quadratfreie Zahl. Die von 1 verschiedenen Sylow-Untergruppen von $G/K$ sind also zyklisch von Primzahlordnung. Wegen (b*) ist $G/K$ nicht zyklisch. Dann existiert aber eine Darstellung $[G:K] = mn$ als Produkt teilerfremder von 1 verschiedener Zahlen $m$ und $n$ derart, daß $G/K$ sowohl ein Element $Ka$ der Ordnung $m$ und ein Element $Kb$ der Ordnung $n$ enthält; vgl. ZASSENHAUS [p. 139, Satz 11]. Da weder $a$ noch $b$ in $K$ liegt, so sind $o(a)$ und $o(b)$ Primzahlen; s. (b*). Da aber $m = o(Ka)$ ein von 1 verschiedener Teiler von $o(a)$ ist, so ist $m$ eine Primzahl; und ebenso sieht man ein, daß $o(n)$ eine Primzahl ist. Also ist $[G:K] = mn$ das Produkt zweier Primzahlen.

Sei nun $[G:K] = pq$ das Produkt zweier verschiedener Primzahlen $p$ und $q$. Dann folgt zunächst aus (a), daß $o(K)$ durch $pq$ teilbar ist. Eine Gruppe der Ordnung $pq$ enthält bekanntlich stets einen Normalteiler von Primzahlordnung; und wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $G/K$ einen Normalteiler $J/K$ der Primzahlordnung $q$ besitzt. Wegen (b*) können die nicht in $J$ enthaltenen Elemente aus $G$, da sie ja auch nicht in $K$ liegen, nur die Primzahlordnungen $p$ und $q$ haben; und aus $[G:J] = p$ folgt dann sogar, daß die nicht in $J$ enthaltenen Elemente aus $G$ sämtlich die Primzahlordnung $p$ haben. Sei $J^*$ die von sämtlichen Elementen $g$ mit $o(g) \neq p$ erzeugte Untergruppe von $G$. Da $G$ keine $p$-Gruppe ist, und da die nicht in $J$ enthaltenen Elemente aus $G$ sämtlich die Ordnung $p$ haben, so gilt $1 < J^* \leqq J < G$. Da $G$ keine Primärgruppe ist, so können wir wieder den Satz von HUGHES-THOMPSON anwenden; vgl. HUGHES-THOMPSON [p. 1099, Theorem 1]. Es wird $[G:J^*] = p$, woraus

insbesondere $J = J^*$ folgt. Also ist $J$ eine sog. $H_p$-Gruppe; und wir folgern aus einem anderen Resultat von HUGHES-THOMPSON, daß $J$ eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe ist; vgl. HUGHES-THOMPSON [p. 1099, Theorem 3]*). Es gibt also einen nilpotenten Normalteiler $R$ von $J$, dessen Ordnung zu $p$ teilerfremd ist, während $J/R$ eine $p$-Gruppe ist. Dann ist $R$ eine charakteristische Untergruppe von $J$ und also ein Normalteiler von $G$ mit $p$-Faktorgruppe $G/R$, woraus dann sogar folgt, daß $R$ eine charakteristische Untergruppe von $G$ ist. Da $o(G)$ ein Vielfaches der Primzahl $q$ ist, so ist auch $o(R)$ ein Vielfaches von $q$. Da $R$ nilpotent ist, so ist die $q$-Sylow-Untergruppe $Q$ von $R$ eine charakteristische Untergruppe von $R$ und $G$; und da $R$ eine Hallsche Untergruppe von $G$ mit zu $q$ teilerfremdem Index $[G:R]$ ist, so ist $Q$ auch die Gesamtheit der $q$-Elemente aus $G$. Aus $[G:K] = pq$ und $[J:K] = q$ folgt $J = KQ$. Da jedes nicht in $K$ gelegene Element aus $J$ wegen (b*) die Ordnung $q$ hat, so liegt jedes nicht in $K$ gelegene Element aus $J$ sogar in $Q$; und daraus folgt $J = Q$ wegen $K \subset J$. Damit sind aber $J$ und $K$ als $q$-Gruppen erwiesen; und dies ist ein Widerspruch, da wir ja oben die Teilbarkeit von $o(K)$ durch $p \neq q$ bewiesen hatten. Aus diesem Widerspruch folgt, daß $G/K$ primär und also $[G:K]$ eine Primzahl ist.

Setzen wir $[G:K] = p$, so haben wegen (b*) alle nicht in $K$ enthaltenen Elemente die Primzahlordnung $p$. Verstehen wir unter $G^*$ die von den sämtlichen Elementen $g$ aus $G$ mit $o(g) \neq p$ erzeugte charakteristische Untergruppe von $G$, und erinnern wir uns daran, daß $G$ keine $p$-Gruppe ist, so wird $1 \subset G^* \subseteq K \subset G$. Aus einem Satz von HUGHES-THOMPSON folgt wieder $[G:G^*] = p$; vgl. HUGHES-THOMPSON [p. 1099, Theorem 1]. Also wird $K = G^*$ und $K$ ist eine sog. $H_p$-Gruppe. Wir wenden ein anderes Resultat von HUGHES-THOMPSON an, um zu zeigen, daß $K$ eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe ist; vgl. HUGHES-THOMPSON [p. 1099, Theorem 3]*). Dann ist aber auch $G$ eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe.

Sei $V \neq 1$ ein in $K$ enthaltener, $\sigma$-zulässiger Normalteiler von $G$. Dann können wir die bereits gewonnenen Resultate mutatis mutandis auch auf $G, \sigma, V$ anwenden. Es folgt insbesondere, daß $[G:V]$ eine Primzahl ist, woraus wir $K = V$ erschließen können. Der einzige in $K$ enthaltene, $\sigma$-zulässige Normalteiler $\neq 1$ von $G$ ist also $K$ selbst.

Natürlich ist $\mathfrak{F}K$ als charakteristische Untergruppe des Normalteilers $K$ ein Normalteiler von $G$. Wäre nun $\mathfrak{F}K$ keine Primärgruppe, so wäre auch $\mathfrak{F}\mathfrak{F}K$ keine Primärgruppe; und es würde aus Folgerung 2.3 folgen, daß $\mathfrak{F}K$ ganz in einer Komponente $X$ von $\sigma$ enthalten ist. Dann wird $X$ wegen Lemma 2.5 von $G$ normalisiert. Aus

$$1 \neq \mathfrak{F}K \subseteq X \cap K$$

und der Zulässigkeit von $K$ folgt, daß der Normalteiler $X$ von $G$, der als Komponente $\sigma$-zulässig ist, ganz in $K$ liegt. Also wird $K = X$ eine Komponente von $\sigma$.

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]. Inzwischen hat O. KEGEL die Nilpotenz der $H_p$-Gruppen bewiesen. Durch Benutzung dieses Kegelschen Satzes ließe sich der Beweis abkürzen.

Wir können also von jetzt an annehmen, daß $\mathfrak{F}K$ primär ist. Da mit $G$ wegen $[G:K]=p$ auch $K$ nicht primär sein kann, und da $K$ Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p$-Gruppe ist, so ist sicherlich $\mathfrak{F}K \neq 1$; und hieraus folgt $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K \neq 1$. Außerdem sind $o(\mathfrak{F}K)$ und $o(\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K)$ zu $p$ teilerfremd, da $\mathfrak{F}K$ primär ist.

Sei weiter $P$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $G$. Dann ist $G=KP$ wegen $[G:K]=p$; und der Normalteiler $K\cap P$ von $P$ hat wegen $G/K\cong P/(K\cap P)$ den Index $p$ in $P$. Da $K\cap P$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $K$ ist, so folgern wir $K\cap P\neq 1$ aus (a). Aus den bekannten Eigenschaften der $p$-Gruppen folgt dann $\mathfrak{Z}P\cap K\neq 1$. Da die nicht in $K$ enthaltenen Elemente wegen (b*) Primzahlordnung haben, so gibt es in $P$ Elemente der Ordnung $p$, die nicht zu $K$ gehören. Folglich existiert eine elementar-abelsche Untergruppe $A$ der Ordnung $o(A)=p^2$ mit $A\cap\mathfrak{Z}P\cap K\neq 1$, die zwar in $P$, aber nicht in $K$ liegt. Es wird dann $A\cap K=A\cap\mathfrak{Z}P\cap K$ zyklisch von der Ordnung $p$.

Wir erinnern zunächst daran, daß $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ eine $q$-Gruppe mit $q\neq p$ und als charakteristische Untergruppe des Normalteilers $K$ ein Normalteiler von $G$ ist. Wir können also die Untergruppe $B=A\cdot\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ von $G$ bilden. Liegt das Element $a$ aus $A$ nicht in $K$, so kann $a$ mit keinem Element $z\neq 1$ aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ vertauschbar sein, da sonst $z$ und $a$ wegen Lemma 2.1 in der gleichen Komponente von $\sigma$ liegen würden, was mit der Zulässigkeit von $K$ unverträglich wäre. Da $A$ mehr als eine zyklische Untergruppe der Ordnung $p$ besitzt, so kann $A$ in $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ nach einem Burnsideschen Resultat nicht nur Automorphismen $\neq 1$ induzieren, deren einziges Fixelement die Eins ist; vgl. BURNSIDE p. 335/36. Ist also $t\neq 1$ ein Element aus $A\cap K$, so gibt es ein Element $s\neq 1$ in $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ mit $st=ts$. Dieses Element $st$ der Ordnung $pq$ liegt in einer Komponente $S$ von $\sigma$, die natürlich auch $s$ und $t$ enthält. Ist $x$ irgendein Element aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$, so ist $xs=sx$; und es folgt

$$1\neq s=s^x\in S\cap S^x,$$

woraus $S=S^x$ [wegen der Normalität von $\sigma$] folgt. Ebenso folgert man für $y$ aus $A$ zunächst $yt=ty$ und dann

$$1\neq t=t^y\in S\cap S^y,$$

also ebenfalls $S=S^y$. Folglich liegt $B=A\cdot\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ ganz in $\mathfrak{N}S$. Wir setzen $T=SB=SA\cdot\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$. Dann ist $S$ ein Normalteiler von $T$. Da $S$ das Element $st\neq 1$ aus $K$ enthält, und da $K$ eine $\sigma$-zulässige Untergruppe ist, so ist $S$ ganz in $K$ enthalten. Da andererseits $A$ nach Konstruktion nicht ganz in $K$ enthalten ist, so wird

$$S\leqq S\cdot\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K\leqq K\cap T<T.$$

Die Partition $\sigma\cap T$ von $T$ ist sicherlich normal. Die Komponente $S$ von [$\sigma$ und] $\sigma\cap T$ ist ein eigentlicher Normalteiler von $T$. Die Gruppe $S$ enthält das Element $st$ der Ordnung $pq$, wo $p$ und $q$ verschiedene Primzahlen sind. Also ist weder $S$ noch $T$ eine Primärgruppe. Wenden wir den bereits bewiesenen Teil von (c) auf die Partition $\sigma\cap T$ von $T$ an, so ergibt sich:

entweder ist $\sigma\cap T$ eine Frobenius-Partition oder $[T:S]$ ist eine Primzahl.

Angenommen nun $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ wäre nicht in $S$ enthalten. Dann wäre die Untergruppe $S \cdot \mathfrak{Z}\mathfrak{F}K/S$ von $T/S$ eine von 1 verschiedene $q$-Gruppe, da ja $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ eine $q$-Gruppe ist. Die Untergruppe $SA/S$ von $T/S$ ist eine von 1 verschiedene $p$-Gruppe, da ja $S$ in $K$ enthalten ist, $A$ aber nicht. Da $p$ und $q$ verschiedene Primzahlen sind, so ist $[T:S]$ durch $pq$ teilbar. Bedenken wir weiter, daß $B=A \cdot \mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ das Produkt des $q$-Normalteilers $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ und der $p$-Gruppe $A$ ist, so folgt, daß $p$ und $q$ die einzigen $o(B)$ teilenden Primzahlen sind; und aus $[T:S]=[B:S\cap B]$ folgt also, daß $p$ und $q$ die einzigen Primteiler von $[T:S]$ sind. Da $[T:S]$ als Vielfaches von $pq$ keine Primzahl ist, so folgt aus der obigen Bemerkung, daß $\sigma \cap T$ eine Frobenius-Partition von $T$ ist. Wegen Satz 4.5, (4), den wir auf die Komponente $S$ der Frobenius-Partition $\sigma \cap T$ von $T$ anwenden können, gibt es dann einen Primteiler $r$ von $[T:S]$, der $o(S)$ nicht teilt. Da aber $p$ und $q$ die einzigen Primteiler von $[T:S]$ sind, so ist $r=p$ oder $q$; und da $o(S)$, wie früher bemerkt, durch $pq$ teilbar ist, so muß $r$ doch $o(S)$ teilen. Dies ist ein Widerspruch, aus dem wir

$$1 < \mathfrak{Z}\mathfrak{F}K \leqq S$$

folgern. Aus Lemma 2.5 ergibt sich, daß die Komponente $S$ von $\sigma$ von $G$ normalisiert wird und also ein Normalteiler von $G$ ist. Da $S$ in $K$ enthalten ist, und da wir schon gezeigt haben, daß $K$ der einzige in $K$ enthaltene, von 1 verschiedene, $\sigma$-zulässige Normalteiler von $G$ ist, so folgt $S=K$; und damit ist der Beweis der Tatsache, daß $K$ eine Komponente von $\sigma$ ist, voll erbracht. Also haben wir (c) bewiesen; und (b) ergibt sich sofort aus (b*) und (c).

Bemerkung 5.2. Die Voraussetzung, daß $G$ keine Primärgruppe sei, ist für die Gültigkeit von (c) unentbehrlich. Sei etwa $G$ eine elementar abelsche $p$-Gruppe der Ordnung $p^n$ mit $3<n$. Dann besitzt $G$ eine Untergruppe $K$ der Ordnung $p^{n-2}$, die also gewiß nicht zyklisch ist. Eine Partition $\sigma$ von $G$ besteht aus allen zyklischen Untergruppen der Ordnung $p$. Diese ist normal und weder trivial noch eine Frobenius-Partition. $K$ ist ein eigentlicher $\sigma$-zulässiger Normalteiler von $G$. Aber weder ist $[G:K]$ eine Primzahl noch ist $K$ eine Komponente von $\sigma$.

Zusatz 5.3. *Eine nicht primäre Gruppe $G$ besitzt höchstens eine normale Partition, die weder einfach noch eine Frobenius-Partition ist.*

Beweis. Es seien $\alpha$ und $\beta$ normale Partitionen von $G$, die weder einfache noch Frobenius-Partitionen sind. Ist $A$ ein $\alpha$-zulässiger eigentlicher Normalteiler von $G$, so ist $[G:A]=a$ eine Primzahl, $A$ und $G$ sind Erweiterungen nilpotenter durch $a$-Gruppen, $A$ ist eine Komponente von $\alpha$ und $A$ wird von allen $g \in G$ mit $o(g) \neq a$ erzeugt, [Satz 5.1]. Ist $x$ ein nicht in $A$ gelegenes Element aus $G$, so ist $o(x)=a$ und $x$ liegt in einer eindeutig bestimmten Komponente $X$ von $\alpha$. Da $X$ nicht in $A$ enthalten ist, so ist $A \cap X = 1$; und aus $[G:A]=a$ folgt $o(X)=a$. Es ist dann klar, daß die von $A$ verschiedenen Komponenten von $\alpha$ genau die nicht in $A$ enthaltenen zyklischen Untergruppen [der Ordnung $a$] sind. Ist entsprechend $B$ ein $\beta$-zulässiger Normalteiler von $G$, so ist $[G:B]=b$ eine Primzahl, $B$ und $G$ sind Erweiterungen nilpotenter durch $b$-Gruppen, $B$ wird von den sämtlichen Elementen mit von $b$ verschiedener

Ordnung erzeugt, $B$ ist eine Komponente von $\beta$ und die übrigen Komponenten von $\beta$ sind genau die nicht in $B$ enthaltenen zyklischen Untergruppen [der Ordnung $b$].

Wäre $a \neq b$, so wäre $G/\mathfrak{F}G$ sowohl eine $a$-Gruppe als auch eine $b$-Gruppe und also gleich 1. Also wäre $G$ eine nilpotente, nicht-primäre Gruppe, so daß $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$ ebenfalls nicht-primär wäre. Eine solche Gruppe läßt nur die triviale Partition zu [Bemerkung 2.4]. Dies ist ein Widerspruch, aus dem wir $a = b$ folgern. Dann wird aber $A = B$; und nun ist es klar, daß $\alpha = \beta$ ist.

FOLGERUNG 5.4. *Ist $\sigma$ eine normale Partition der Gruppe $G$ und die $\sigma$-zulässige Untergruppe $U$ von $G$ weder primär noch normalisatorgleich, so ist $U$ eine Komponente von $\sigma$**).

BEWEIS. Ist zunächst $U$ nilpotent, so ist mit $U$ auch $\mathfrak{Z}U$ nicht primär. Aus Folgerung 2.3 ergibt sich dann, daß $U$ ganz in einer Komponente von $\sigma$ enthalten ist. Da aber $U$ eine von 1 verschiedene $\sigma$-zulässige Untergruppe von $G$ ist, so ist $U$ selbst die $U$ enthaltende Komponente von $\sigma$. — Ist weiter $U$ nicht nilpotent, so ist mit $U$ auch $\mathfrak{N}U$ nicht primär; und $U$ ist ein eigentlicher $(\sigma \cap \mathfrak{N}U)$-zulässiger Normalteiler von $\mathfrak{N}U$, der gewiß nicht in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}U$ enthalten ist. Anwendung von Satz 4.1, (4) ergibt dann, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}U$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}U$ ist. Wir können also Satz 5.1, (c) anwenden, um zu zeigen, daß $U$ eine Komponente von $\sigma$ ist.

BEMERKUNG 5.5. Im Verlaufe der vorhergehenden Betrachtungen haben wir verschiedentlich die folgende Tatsache aus Satz 4.1, (4) und Satz 5.1, (c) hergeleitet:

ist die normale Partition $\sigma$ der Gruppe $G$ nicht einfach, ist $G$ nicht primär, so gibt es einen und nur einen maximalen, eigentlichen $\sigma$-zulässigen Normalteiler von $G$.

ZUSATZ 5.6. *Ist $G$ eine $p$-Gruppe mit $G^p \neq 1$ und $\sigma$ eine normale Partition von $G$, so gibt es eine Komponente von $\sigma$, die ein Normalteiler von $G$ ist und sowohl $\mathfrak{Z}G$ wie auch alle Elemente mit von $p$ verschiedener Ordnung enthält.*

BEWEIS. Sei $g$ irgendein Element aus $G$ mit $g^p \neq 1$. Dann liegt $g$ in einer eindeutig bestimmten Komponente $X$ von $\sigma$. Aus Lemma 2.1 folgt sofort, daß jedes Element aus $\mathfrak{Z}G$ mit $g$ in der gleichen Komponente liegt, daß also $\mathfrak{Z}G \leqq X$ ist. Da das Zentrum einer von 1 verschiedenen $p$-Gruppe ebenfalls von 1 verschieden ist, so folgt aus der vorausgesetzten Existenz von Elementen $g$ mit $g^p \neq 1$ in $G$ die Existenz einer Komponente $L$ von $\sigma$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

$1 < \mathfrak{Z}G \leqq L$ und $L$ enthält alle Elemente aus $G$ mit von $p$ verschiedener Ordnung [Lemma 2.1].

Aus Lemma 2.5 folgt weiter, daß $L$ ein Normalteiler von $G$ ist.

LEMMA 5.7. *Es sei $\sigma$ eine normale Partition der Gruppe $G$ und $A$ eine Komponente von $\sigma$.*

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]: und $U$ ist nilpotent, wie sich aus einem neuen Satz von O. KEGEL ergibt.

(a) *Ist die Primzahl $p$ ein Teiler von $o(A)$, aber nicht von $[G:A]$, so ist die Komponente $B$ von $G$ [dann und nur dann] zu $A$ konjugiert, wenn $p$ ein Teiler von $o(B)$ ist.*

(b) *Ist die Primzahl $p$ ein gemeinsamer Teiler von $o(A)$ und $[G:A]$, so ist $p$ auch ein Teiler von $[\mathfrak{N}A:A]$.*

(c) *Dann und nur dann ist $A$ eine Hallsche Untergruppe von $G$, wenn $A$ eine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N}A$ ist.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß die Primzahl $p$ ein Teiler von $o(A)$, aber nicht von $[G:A]$ ist. Ist $S$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $A$, so ist $S \neq 1$ und auch eine $p$-Sylow-Untergruppe von $G$. Ist weiter die Ordnung der Komponente $B$ von $\sigma$ ebenfalls ein Vielfaches von $p$, so enthält $B$ ein Element $b$ der Ordnung $p$. Aus den Sylowschen Sätzen folgt die Existenz eines Elements $g$ aus $G$ derart, daß $b^g$ in der $p$-Sylow-Untergruppe $S$ von $G$ liegt. Aus

$$1 \neq b^g \in S \cap B^g \subseteq A \cap B^g$$

und der Normalität von $\sigma$ folgt $A = B^g$, womit (a) bewiesen ist.

Ist zweitens die Primzahl $p$ ein gemeinsamer Teiler von $o(A)$ und $[G:A]$, so ist eine $p$-Sylow-Untergruppe $S$ von $A$ weder gleich 1 noch eine $p$-Sylow-Untergruppe von $G$. Ist $P$ eine $S$ enthaltende $p$-Sylow-Untergruppe von $G$, so wird also $S = A \cap P < P$; und hieraus folgt sogar $S < \mathfrak{N}S \cap P$. Ist $t$ irgendein nicht in $S$ enthaltenes Element aus $\mathfrak{N}S \cap P$, so liegt $t$ auch nicht in $A$. Andererseits wird

$$1 \neq S = S^t \subseteq A \cap A^t;$$

und hieraus folgt $A = A^t$ wegen der Normalität von $\sigma$. Mithin liegt $t$ in $\mathfrak{N}A$, aber nicht in $A$, so daß $At$ ein von 1 verschiedenes $p$-Element aus $\mathfrak{N}A/A$ ist. Folglich ist $[\mathfrak{N}A:A]$ ein Vielfaches von $p$, womit (b) bewiesen ist. — (c) ist eine fast unmittelbare Folge von (b).

## 6. Hallsche Partitionen

Die Partition $\sigma$ der Gruppe $G$ möge als *Hallsche Partition von $G$* bezeichnet werden, wenn jede Komponente von $\sigma$ eine Hallsche Untergruppe von $G$ ist. Die triviale Partition ist stets Hallsch.

Aus Lemma 5.7, (a) folgt, daß zwei Komponenten einer normalen Hallschen Partition dann und nur dann konjugiert sind, wenn ihre Ordnungen nicht teilerfremd sind.

Satz 6.1. *Die folgenden Eigenschaften der normalen Partition $\sigma$ der Gruppe $G$ sind äquivalent:*

(a) *$\sigma$ ist eine Hallsche Partition von $G$.*

(b) *Vertauschbare Elemente gleicher Primzahlordnung liegen in der gleichen Komponente von $\sigma$.*

(c) *Vertauschbare Elemente liegen in der gleichen Komponente von $\sigma$.*

BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, daß $\sigma$ Hallsch ist, und betrachten zwei vertauschbare Elemente $a$, $b$ der gleichen Primzahlordnung $p$ aus $G$. Dann ist $\{a, b\}$ eine abelsche $p$-Gruppe; und eine solche ist in einer $p$-Sylow-Untergruppe $P$ von $G$ enthalten. Weiter liegt $a$ in einer Komponente $A$ von $\sigma$. Das Element $a$ der Ordnung $p$ aus $A$ liegt in einer $p$-Sylow-Untergruppe $Q$ von $A$. Da $Q \neq 1$ und $A$ nach Voraussetzung eine Hallsche Untergruppe von $G$ ist, so ist $Q$ sogar eine $p$-Sylow-Untergruppe von $G$. Da die $p$-Sylow-Untergruppen von $G$ konjugiert sind, so gibt es ein $Q^g = P$ erfüllendes Element $g$ in $G$. Da

$$\{a, b\} \subseteq P = Q^g \subseteq A^g$$

ist, und da $A^g$ mit $A$ eine Komponente der normalen Partition $\sigma$ ist, so haben wir die Zugehörigkeit von $a$ und $b$ zur gleichen Komponente von $\sigma$ dargetan. [Es ist sogar $A = A^g$.] Also folgt (b) aus (a).

Es ergibt sich ohne weiteres aus Lemma 2.1, daß (c) aus (b) folgt.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (c) an. Ist $U$ eine Untergruppe von $G$ und $\mathfrak{Z}U \neq 1$, so gibt es ein Element $t \neq 1$ in $\mathfrak{Z}U$. Dieses liegt in einer Komponente $T$ von $\sigma$. Da jedes Element aus $U$ mit $t$ vertauschbar ist, so folgt aus (c), daß alle Elemente aus $U$ in der gleichen Komponente wie $t$ liegen. Da $t \neq 1$ in einer und nur einer Komponente enthalten ist, so folgt $U \subseteq T$. — Sei nun $X$ eine Komponente, deren Ordnung durch die Primzahl $p$ teilbar ist. Dann enthält $X$ ein Element $a$ der Ordnung $p$; und dieses liegt in einer $p$-Sylow-Untergruppe $P$ von $G$. Nach dem eben Gezeigten liegt $P$ in einer Komponente $Y$ von $\sigma$. Aus

$$1 \neq a \in X \cap P \subseteq X \cap Y$$

folgt $X = Y$, so daß $X$ eine ganze $p$-Sylow-Untergruppe von $G$ enthält, wenn $o(X)$ ein Vielfaches von $p$ ist. Also ist $X$ Hallsch; und damit haben wir (a) aus (c) hergeleitet.

BEMERKUNG 6.2. Die Normalität von $\sigma$ wurde nur bei der Herleitung von (b) aus (a) benutzt. Der Verfasser hat nicht entscheiden können, ob diese Voraussetzung entbehrlich ist oder nicht.

BEMERKUNG 6.3. Wir haben im Verlaufe des Beweises von Satz 6.1 gezeigt:

*ist $\sigma$ eine normale Hallsche Partition der Gruppe $G$ und $U$ eine Untergruppe von $G$ mit $\mathfrak{Z}U \neq 1$, so ist $U$ ganz in einer Komponente von $\sigma$ enthalten.*

BEMERKUNG 6.4. *Ist $\sigma$ eine normale Hallsche Partition und $U$ eine Untergruppe von $G$, so ist auch $\sigma \cap U$ eine normale Hallsche Partition von $U$,* da sich die Bedingungen (b) und (c) des Satzes 6.1 offenbar auf Untergruppen vererben.

FOLGERUNG 6.5. *Ist $\sigma$ eine normale Hallsche Partition der Gruppe $G$, so ist* $o(G) = \prod_{\mathfrak{X} \subseteq \sigma} o(\mathfrak{X})$.

Hierbei ist, wie angedeutet, das Produkt über alle Klassen $\mathfrak{X}$ konjugierter Komponenten von $\sigma$ zu erstrecken; und $o(\mathfrak{X})$ ist die gemeinsame Ordnung der Untergruppen aus der Klasse $\mathfrak{X}$ konjugierter Untergruppen.

Beweis. Aus Lemma 5.7, (a) folgt sofort $(o(\mathfrak{X}), o(\mathfrak{Y})) = 1$, falls $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zwei verschiedene Klassen konjugierter Komponenten von $\sigma$ sind. Da jede Sylow-Untergruppe $\neq 1$ von $G$ wegen Bemerkung 6.3 in einer und nur einer Komponente der normalen Hallschen Partition $\sigma$ von $G$ enthalten ist, so teilt jeder Primzahlpotenzteiler $\neq 1$ von $o(G)$ genau eine der Zahlen $o(\mathfrak{X})$; und hieraus folgt unsere Behauptung.

Ist $\sigma$ eine Frobenius-Partition der Gruppe $G$, so ist $\mathfrak{F}G$ ein $\sigma$-zulässiger, eigentlicher, Hallscher Normalteiler von $G$ und die Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in $G$ sind genau die normalisatorgleichen Komponenten von $\sigma$ [Satz 4.1]. Wir erhalten also in der aus $\mathfrak{F}G$ und den Komplementen von $\mathfrak{F}G$ bestehenden Untergruppenmenge $\sigma^*$ eine Frobenius-Partition von $G$. Diese Konstruktion legt es nahe, eine *Frobenius-Partition von G minimal* zu nennen, wenn $\mathfrak{F}G$ eine ihrer Komponenten ist. Vgl. hierzu Satz 4.7.

Satz 6.6. *Eine Gruppe besitzt höchstens eine minimale Frobenius-Partition.*

Denn die Komponenten einer minimalen Frobenius-Partition der Gruppe $G$ sind wegen Satz 4.1 notwendig $\mathfrak{F}G$ und die sämtlichen Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in $G$.

Bemerkung 6.7. Dieses Resultat stellt eine Verschärfung eines Resultats von G. Bachmann [p. 470, Theorem 3.2] dar.

Satz 6.8. *Die folgenden Eigenschaften der normalen, nicht-trivialen Partition $\sigma$ von $G$ sind äquivalent:*

(a) *$\sigma$ ist eine minimale Frobenius-Partition.*

(b) *$\sigma$ ist eine Hallsche Frobenius-Partition.*

(c) *$\sigma$ ist eine Hallsche Partition, von deren Komponenten wenigstens eine ein Normalteiler ist.*

(d) *$\sigma$ ist eine Hallsche Partition und einfache Untergruppen von $G$ sind in Komponenten von $\sigma$ enthalten.*

(e) *Ist $U \neq 1$ eine Untergruppe von $G$, so gibt es eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von $U$, die ganz in einer Komponente von $\sigma$ enthalten ist.*

(f) *$\sigma$ ist eine nicht-einfache, Hallsche Partition.*

Beweis. Ist $\sigma$ eine minimale Frobenius-Partition, so besteht $\sigma$ aus dem Hallschen Normalteiler $\mathfrak{F}G$ und den Komplementen von $\mathfrak{F}G$ in $G$, die dann notwendig auch Hallsch sind [Satz 4.1]. Damit haben wir (b) aus (a) hergeleitet.

Ist $\sigma$ eine Hallsche Frobenius-Partition, so ist $\mathfrak{F}G$ ein eigentlicher, Hallscher, nilpotenter, $\sigma$-zulässiger Normalteiler von $G$ [Satz 4.1]. Aus Bemerkung 6.3 ergibt sich, daß $\mathfrak{F}G$ ganz in einer Komponente von $\sigma$ enthalten und also selbst eine Komponente von $\sigma$ ist. Damit haben wir (c) und (a) aus (b) hergeleitet. — Aus (c) folgt wegen Satz 4.5 sofort, daß $\sigma$ eine Hallsche Frobenius-Partition ist, womit die Äquivalenz von (a), (b) und (c) dargetan ist.

Sei nun $\sigma$ eine Hallsche Frobenius-Partition und $E$ eine einfache Untergruppe von $G$. Ist $E$ zyklisch, so liegt $E$ natürlich in einer Komponente von $\sigma$. Wir können also annehmen, daß $E$ nicht abelsch ist. Dann ist $E \subseteq \mathfrak{F}G$ und also $E \cap \mathfrak{F}G = 1$; und es folgt aus Satz 4.1, (3), daß $E$ in einer normalisatorgleichen Komponente von $\sigma$ enthalten ist. Damit haben wir (d) aus (b) hergeleitet.

Wir nehmen die Gültigkeit von (d) an und betrachten eine Untergruppe $U \neq 1$ von $G$. Ist zunächst $\mathfrak{F}U \neq 1$, so ist $\mathfrak{F}U$ eine von 1 verschiedene, nilpotente, charakteristische Untergruppe von $U$. Da $\sigma$ Hallsch ist, so folgt aus Bemerkung 6.3, daß die nilpotente Untergruppe $\mathfrak{F}U$ ganz in einer Komponente von $\sigma$ enthalten ist. Ist aber $\mathfrak{F}U = 1$, so ist der Sockel $\mathfrak{S}U$ von $U$ eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von $U$, die das Produkt nicht-abelscher einfacher Gruppen $E(i)$ ist. Jedes $E(i)$ ist wegen (d) in einer Komponente $F(i)$ von $\sigma$ enthalten. Ist $i \neq j$, so können wir ein Element $a$ in $E(i)$ und ein Element $b$ in $E(j)$ finden, deren Ordnungen verschiedene Primzahlen sind. Aus Lemma 2.1 folgt dann, daß die natürlich vertauschbaren Elemente $a$ und $b$ in derselben Komponente von $\sigma$ liegen. Da $a$ in $F(i)$ und $b$ in $F(j)$ liegt, so wird $F(i) = F(j)$; und damit haben wir gezeigt, daß alle $F(i)$ einander gleich sind. Also liegen alle $E(i)$ in der gleichen Komponente von $\sigma$; und damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{S}U$ in einer Komponente von $\sigma$ enthalten ist. (e) ist mithin eine Folge von (d).

Wir nehmen die Gültigkeit von (e) an. Dann gibt es eine charakteristische Untergruppe $C \neq 1$ von $G$, die ganz in einer Komponente $K$ von $\sigma$ enthalten ist. Aus Lemma 2.5 folgt, daß die Komponente $K$ ein Normalteiler von $G$ ist. — Sei weiter $U \neq 1$ eine elementar-abelsche $p$-Untergruppe von $G$. Dann ist $U$ charakteristisch-einfach; und Anwendung der Bedingung (e) ergibt, daß $U$ in einer Komponente von $\sigma$ enthalten ist. Sind $a$ und $b$ vertauschbare Elemente gleicher Primzahlordnung aus $G$, so ist $\{a, b\}$ eine elementar-abelsche $p$-Untergruppe; und $a$ und $b$ sind also in derselben Komponente von $\sigma$ enthalten. Anwendung von Satz 6.1 zeigt, daß $\sigma$ eine Hallsche Partition ist. Da eine der Komponenten von $\sigma$ ein Normalteiler ist, so haben wir gezeigt, daß $\sigma$ eine nicht-einfache, Hallsche Partition ist, haben also (f) aus (e) hergeleitet.

Gilt (f), so ist $\sigma$ eine Hallsche Partition von $G$ und es gibt einen eigentlichen, $\sigma$-zulässigen Normalteiler $K$ von $G$. Dieser ist mit $\sigma$ Hallsch; und es folgt aus Satz 5.1, (a) [oder aus Satz 4.5, (3)], daß $\sigma$ eine Hallsche Frobenius-Partition ist. Also ist (b) eine Folge von (f); und die Äquivalenz von (a) bis (f) ist erwiesen.

BEMERKUNG 6.9. Eine normale Hallsche Partition ist entweder trivial oder einfach oder eine minimale Frobenius-Partition, wie sich sofort aus der Äquivalenz der Bedingungen (a) und (f) des Satzes 6.8 ergibt. Für eine wesentliche Verschärfung dieser Bemerkung vgl. Satz 6.11.

BEMERKUNG 6.10. Im Zusammenhang mit der zweiten Hälfte der Bedingung (d) von Satz 6.8 sei zunächst auf Folgerung 3.7 hingewiesen. Zieht man

aber noch den Satz 6.11 heran, so erweist sich diese Bedingung als unnötig scharf; ist nämlich die normale Partition $\sigma$ von $G$ Hallsch, aber nicht trivial, und ist weiter $G$ nicht einfach, so ist $\sigma$ eine Hallsche Frobenius-Partition, also sogar eine minimale Frobenius-Partition. Man kann also (d) durch die Forderung

(d*) *$\sigma$ ist Hallsch und $G$ ist nicht einfach*

ersetzen. Zwischen den Bedingungen (d) und (d*) steht die offenbar gleichwertige Bedingung

(d**) *$\sigma$ ist Hallsch und einfache charakteristische Untergruppen von $G$ sind in Komponenten von $\sigma$ enthalten.*

Wir wenden uns jetzt dem Satz 6.11, auf den wir schon vorgegriffen haben, zu.

Satz 6.11. *Wenn die normale Hallsche Partition $\sigma$ von $G$ nicht trivial und auch keine Frobenius-Partition ist, so ist $G$ einfach [und nicht abelsch]; und eine Untergruppe von $G$ ist dann und nur dann eine Komponente von $\sigma$, wenn sie eine maximale nilpotente Untergruppe von $G$ ist.*

Beweis. Ist $X$ eine Komponente von $\sigma$, so folgern wir aus der Definition der Frobenius-Partition, daß $X < \mathfrak{N}X$ ist. Aus Bemerkung 6.4 ergibt sich weiter, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ eine Hallsche Partition von $\mathfrak{N}X$ ist. Es ist $X \neq \mathfrak{N}X$ eine Komponente von $\sigma \cap \mathfrak{N}X$, so daß $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ nicht trivial ist; und die Komponente $X$ von $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ ist ein eigentlicher Normalteiler von $\mathfrak{N}X$. Wir können also Satz 6.8 anwenden und finden, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ eine minimale Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$ ist. Der eigentliche $(\sigma \cap \mathfrak{N}X)$-zulässige Normalteiler $X$ von $\mathfrak{N}X$ ist folglich wegen Satz 4.1, (1) nilpotent. Damit haben wir die Nilpotenz aller Komponenten von $\sigma$ bewiesen. — Aus Bemerkung 6.3 folgt weiter, daß jede nilpotente Untergruppe von $G$ in einer Komponente der Hallschen Partition $\sigma$ enthalten ist. Aus diesen beiden Tatsachen zusammen ergibt sich die zweite Behauptung unseres Satzes, nämlich:

(a) die Untergruppe $U$ von $G$ ist dann und nur dann eine Komponente von $\sigma$, wenn $U$ eine maximale nilpotente Untergruppe von $G$ ist.

Ist $K$ ein nilpotenter Normalteiler von $G$, so ist $K$ wegen (a) ganz in einer Komponente $H$ von $\sigma$ enthalten. Wäre $K \neq 1$, so würde aus Lemma 2.5 folgen, daß $H$ ein Normalteiler von $G$ ist; und damit hätten wir gezeigt, daß die nicht-triviale Partition $\sigma$ auch nicht einfach ist. Da aber $H$ eine Hallsche Untergruppe von $G$ ist, so würde aus Satz 5.1, (a) folgen, daß $\sigma$ eine Frobenius-Partition von $G$ ist, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Aus diesem Widerspruch folgt $K = 1$; und wir haben gezeigt:

(b) 1 ist der einzige nilpotente Normalteiler von $G$.

Wir betrachten einen eigentlichen Normalteiler $K$ von $G$ und eine $X \cap K = 1$ erfüllende Komponente $X$ von $G$. Dann ist $\sigma(K)$ ein Teiler von $[G:X]$. Da

aber $X$ eine Hallsche Untergruppe von $G$ ist, so sind $o(X)$ und $o(K)$ teilerfremd. In $X$ gibt es ein Element $t$ von Primzahlordnung $p$. Ist $k$ ein mit $t$ vertauschbares Element aus $K$, so haben $k$ und $t$ teilerfremde Ordnung. Aus Lemma 2.1 folgt, daß $k$ und $t$ der gleichen Komponente $X$ von $\sigma$ angehören. Also liegt $k$ in $X \cap K = 1$. Folglich ist 1 das einzige Element aus $K$, mit dem $t$ vertauschbar ist. Der von $t$ in $K$ induzierte Automorphismus besitzt also kein von 1 verschiedenes Fixelement und hat Primzahlordnung $p$, ist ein Frobenius-Automorphismus von $K$. Anwendung des Satzes von THOMPSON ergibt die Nilpotenz von $K$; vgl. THOMPSON [*1*; p. 579, Theorem 1]. Dies widerspricht aber (b). Folglich gilt:

(c) $K \cap X \neq 1$ für jede Komponente $X$ von $\sigma$ und jeden eigentlichen Normalteiler $K$ von $G$.

Sei wieder $K$ ein eigentlicher Normalteiler von $G$ und $X$ eine Komponente von $\sigma$. Ist $g$ ein Element aus $\mathfrak{N}X$, so gilt

$$(K \cap X)^g = K^g \cap X^g = K \cap X,$$

so daß $g$ auch zu $\mathfrak{N}(K \cap X)$ gehört. Liegt umgekehrt $g$ in $\mathfrak{N}(K \cap X)$, so folgt aus (c) und Lemma 2.5 die Zugehörigkeit von $g$ zu $\mathfrak{N}X$. Damit haben wir gezeigt:

(d) Ist $K$ ein eigentlicher Normalteiler von $G$ und $X$ eine Komponente von $\sigma$, so ist $\mathfrak{N}X = \mathfrak{N}(X \cap K)$.

Ist $K$ ein eigentlicher Normalteiler von $G$, so ist $\sigma \cap K$ eine normale Hallsche Partition von $K$ [Bemerkung 6.4]. Ist $X$ eine Komponente von $\sigma$ und $g$ ein Element aus $G$, so ist auch $X^g$ eine Komponente von $\sigma$; und es folgt aus (c), daß $K \cap X \neq 1$ und $K \cap X^g \neq 1$ Komponenten von $\sigma \cap K$ sind. Wegen $K \cap X^g = (K \cap X)^g$ sind diese Komponenten sogar isomorph; und jetzt folgt aus Lemma 5.7, (a), daß $K \cap X$ und $K \cap X^g$ in $K$ konjugiert sind. Es gibt also ein

$$(K \cap X)^g = K \cap X^g = (K \cap X)^k$$

erfüllendes Element $k$ in $K$. Dann gehört $gk^{-1}$ zu $\mathfrak{N}(K \cap X) = \mathfrak{N}X$ [wegen (d)]. Mithin liegt jedes Element $g$ in $K \cdot \mathfrak{N}X$. Folglich gilt:

(e) Ist $K$ ein eigentlicher Normalteiler von $G$ und $X$ eine Komponente von $\sigma$, so ist $G = K \cdot \mathfrak{N}X$.

Es sei $K$ wieder ein eigentlicher Normalteiler von $G$. Ist $x$ irgendein Element aus $G$, so liegt $x$ in einer Komponente $X$ von $\sigma$. Wegen (a) ist $X$ nilpotent; und hieraus folgt die Nilpotenz von $KX/K$. Da aber $X$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ ist, so ist $KX/K$ ein Normalteiler von $K \cdot \mathfrak{N}X/K = G/K$ [wegen (e)]. Daraus folgt, daß jedes Element aus $G/K$ in wenigstens einem nilpotenten Normalteiler von $G/K$ liegt. Da das Produkt aller nilpotenten Normalteiler einer Gruppe selbst nilpotent ist [die Fittingsche Untergruppe], so gilt:

(f) $G/K$ ist nilpotent für jeden eigentlichen Normalteiler $K$ von $G$.

Ist $K$ ein eigentlicher Normalteiler von $G$, so ist $G/K$ nilpotent und es gibt also ein Element $Kw$ in $G/K$, dessen Ordnung $o(Kw)$ durch jeden Prim-

teiler der Ordnung von $G/K$ teilbar ist. Dann ist a fortiori $o(w)$ durch jeden Primteiler von $o(G/K)=[G:K]$ teilbar. Natürlich liegt $w$ in einer Komponente $W$ von $\sigma$. Da $W$ eine Hallsche Untergruppe von $G$ ist, und da $o(W)$ durch jeden Primteiler von $o(w)$ und also auch durch jeden Primteiler von $[G:K]$ teilbar ist, so enthält $W$ für jeden Primteiler $p$ von $[G:K]$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $G$; und $KW/K$ enthält für jeden Primteiler $p$ von $[G:K]=o(G/K)$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $G/K$. Also ist $G/K=KW/K$; und damit haben wir gezeigt:

(g) Ist $K$ ein eigentlicher Normalteiler von $G$, so gibt es eine $KW=G$ erfüllende Komponente $W$ von $\sigma$.

Wir betrachten wieder einen eigentlichen Normalteiler $K$ von $G$. Wegen (g) gibt es eine $G=KW$ erfüllende Komponente $W$ von $\sigma$; und wir folgern $W\cap K\neq 1$ aus (c). Wir haben schon bemerkt, daß $W$ nicht normalisatorgleich sein kann, da ja sonst $\sigma$ Frobenisch wäre. Es ist also $W<\mathfrak{N}W$; und aus dem Dedekindschen Modulsatz folgern wir $\mathfrak{N}W=W(K\cap\mathfrak{N}W)$ und $K\cap W<K\cap\mathfrak{N}W$, da ja sonst $W=\mathfrak{N}W$ sein würde. Wegen Bemerkung 6.4 ist $\sigma\cap(K\cap\mathfrak{N}W)$ eine Hallsche normale Partition von $K\cap\mathfrak{N}W$; und $K\cap W\neq 1$ ist eine Komponente dieser Partition, die gleichzeitig Normalteiler ist. Aus Satz 6.8 erschließen wir, daß $\sigma\cap(K\cap\mathfrak{N}W)$ eine minimale Frobenius-Partition ist, so daß also $K\cap W$ die Fittingsche Untergruppe von $K\cap\mathfrak{N}W$ ist. Aus Satz 4.1 folgt dann, daß die übrigen Komponenten von $\sigma\cap(K\cap\mathfrak{N}W)$ normalisatorgleich, untereinander in $K\cap\mathfrak{N}W$ konjugiert und gerade die sämtlichen Komplemente von $K\cap W$ in $K\cap\mathfrak{N}W$ sind. Ist $X$ eine von $K\cap W$ verschiedene Komponente von $\sigma\cap(K\cap\mathfrak{N}W)$ und $w$ ein Element aus $W$, so ist auch $X^w$ ein Komplement von $K\cap W$ in $K\cap\mathfrak{N}W$. Also ist $X^w$ zu $X$ in $K\cap\mathfrak{N}W$ konjugiert. Es gibt folglich ein $X^w=X^k$ erfüllendes Element $k$ in $K\cap\mathfrak{N}W$. Folglich gehört $wk^{-1}$ zum Normalisator von $X$. Aus $\mathfrak{N}W=W(K\cap\mathfrak{N}W)$ folgt, daß das Komplement $X$ von $K\cap W$ in $K\cap\mathfrak{N}W$ auch ein Komplement von $W$ in $\mathfrak{N}W$ ist. Da $\sigma\cap\mathfrak{N}W$ eine normale Hallsche Partition von $\mathfrak{N}W$ ist [Bemerkung 6.4] und da der Normalteiler $W$ von $\mathfrak{N}W$ eine Komponente von $\sigma\cap\mathfrak{N}W$ ist, so folgt aus Satz 6.8, daß $\sigma\cap\mathfrak{N}W$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}W$ ist, daß $W$ genau die Fittingsche Untergruppe von $\mathfrak{N}W$ ist, und daß die übrigen Komponenten von $\sigma\cap\mathfrak{N}W$ sämtlich normalisatorgleich und die Komplemente von $W$ in $\mathfrak{N}W$ sind. Insbesondere ist also $X$ eine normalisatorgleiche Untergruppe von $\mathfrak{N}W$, so daß $wk^{-1}$ zu $X$ gehört. Dann gehört $w$ zu $XK=K$; und damit haben wir $W\subseteq K$ bewiesen. Also wird $G=KW=K$; und damit haben wir gezeigt, daß die Annahme der Existenz eigentlicher Normalteiler von $G$ zu einem Widerspruch führt. Also ist $G$ einfach; und eine einfache Gruppe mit nicht trivialer Partition kann nicht zyklisch von Primzahlordnung und also auch nicht abelsch sein.

Der Satz 6.11 enthält offenbar auch die folgende Verschärfung von Satz 6.8 bzw. Satz 4.5, (4):

Zusatz 6.12. *Die Partition $\sigma$ von $G$ ist dann und nur dann eine minimale Frobenius-Partition von $G$, wenn $\sigma$ normal, Hallsch und nicht-trivial ist, und wenn gleichzeitig $G$ nicht einfach ist.*

Man kann dies auch so aussprechen: Eine normale Hallsche Partition $\sigma$ der Gruppe $G$ ist entweder trivial oder minimal Frobenisch oder aber $G$ ist einfach und alle Komponenten von $\sigma$ sind nilpotent. Die Gesamtheit der Sylow-Untergruppen der alternierenden Gruppe vom Grade 5 ist ein Beispiel einer normalen, Hallschen Partition einer einfachen Gruppe. Für eine umfangreiche Beispielklasse vgl. SUZUKI [*3*; p. 870].

FOLGERUNG 6.13. *Eine Gruppe besitzt höchstens eine normale, nicht-triviale Hallsche Partition.*

BEWEIS. Ist $\sigma$ eine normale, nicht-triviale Hallsche Partition der Gruppe $G$, so bestehen zwei Möglichkeiten: Ist zunächst $G$ nicht einfach, so folgt aus Zusatz 6.12, daß $\sigma$ eine minimale Frobenius-Partition von $G$ ist; und wegen Satz 6.6 besitzt $G$ höchstens eine minimale Frobenius-Partition. Ist aber $G$ einfach, so ergibt sich aus Zusatz 6.12, daß $\sigma$ keine Frobenius-Partition ist — eine Hallsche Partition ist ja wegen Satz 6.8 dann und nur dann eine Frobenius-Partition, wenn sie eine minimale Frobenius-Partition ist. Aber in diesem Fall besteht $\sigma$ wegen Satz 6.11 genau aus den maximalen nilpotenten Untergruppen, ist also ebenfalls eindeutig bestimmt.

FOLGERUNG 6.14. (a) *Eine aus genau zwei Klassen konjugierter Untergruppen bestehende Partition ist eine Frobenius-Partition.*

(b) *Dann und nur dann ist die Partition $\sigma$ von $G$ eine minimale Frobenius-Partition von $G$, wenn $\sigma$ eine aus genau zwei Klassen konjugierter Untergruppen bestehende Hallsche Partition von $G$ ist.*

BEWEIS. Es bestehe zunächst die Partition $\sigma$ von $G$ aus genau den zwei Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ konjugierter Untergruppen von $G$. Dann ist $\sigma$ sicherlich eine normale, nicht-triviale Partition von $G$. Anwendung von (1.5) ergibt dann

$$1 \leqslant d(\mathfrak{A})^{-1} + d(\mathfrak{B})^{-1};$$

und dies ist gleichwertig mit

$$d(\mathfrak{A})\, d(\mathfrak{B}) < d(\mathfrak{A}) + d(\mathfrak{B}).$$

Folglich wird

$$0 \leqq [d(\mathfrak{A}) - 1][d(\mathfrak{B}) - 1] < 1,$$

da ja der Index $d(\mathfrak{X})$ eine positive ganze Zahl ist; und hieraus folgt sofort

$$0 = [d(\mathfrak{A}) - 1][d(\mathfrak{B}) - 1],$$

so daß $d(\mathfrak{A})$ oder $d(\mathfrak{B})$ gleich 1 ist. Also besteht eine dieser beiden Klassen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus normalisatorgleichen Untergruppen, so daß $\sigma$ eine Frobenius-Partition ist. Damit ist (a) bewiesen.

Eine minimale Frobenius-Partition von $G$ besteht, wie sich aus der Definition und Satz 4.1 ergibt, genau aus $\mathfrak{F}G$ und der Klasse der Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in $G$, die alle untereinander konjugiert sind. Außerdem sind $\mathfrak{F}G$ und seine Komplemente Hallsche Untergruppen, womit die Notwendigkeit unserer Bedingungen [ad (b)] dargetan ist.

Sind umgekehrt die Bedingungen von (b) erfüllt, so ergibt sich aus (a), daß $\sigma$ eine Hallsche Frobenius-Partition ist; und eine solche ist wegen Satz 6.8, (b) eine minimale Frobenius-Partition, womit auch (b) bewiesen ist.

Bemerkung 6.15. Ist $G$ die alternierende Gruppe vom Grade 4, so besitzt $G$ einen abelschen Normalteiler $K$ der Ordnung 4 mit $K^2=1$; und alle nicht in $K$ enthaltenen Elemente haben die Ordnung 3. Man überzeugt sich, daß alle zyklischen Untergruppen der Ordnung 2 und auch alle zyklischen Untergruppen der Ordnung 3 untereinander konjugiert sind. Die von 1 verschiedenen zyklischen Untergruppen haben alle die Ordnung 2 oder 3; sie bilden eine normale, nicht-triviale Frobenius-Partition $\sigma$ von $G$, die nicht minimal ist, aber in genau zwei Klassen konjugierter Untergruppen zerfällt. Die zweite der ad (b) angegebenen Bedingungen ist also unentbehrlich.

## 7. Die Struktur der Komponenten und ihrer Normalisatoren

Ist $A$ eine Komponente der normalen und nicht-trivialen Partition $\sigma$ der Gruppe $G$, und ist zunächst $A=\mathfrak{N}A$, so folgt aus Satz 4.1 und Bemerkung 4.9, daß $A$ weder nicht-triviale Partitionen noch elementar-abelsche Untergruppen der Ordnung $p^2$ besitzt. Ist zweitens $A\neq\mathfrak{N}A$, so ist die Komponente $A$ der normalen, nicht-trivialen Partition $\sigma\cap\mathfrak{N}A$ von $\mathfrak{N}A$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}A$; und es folgt aus Lemma 3.3, daß $A$ nilpotent oder eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine Primärgruppe ist*). Ähnlich kann man Satz 4.1 und Satz 5.1 benutzen, um Aussagen über die Struktur von $\mathfrak{N}A$ zu gewinnen. Wir wollen darüber hinaus aber die Situation von $A$ in $G$ etwas aufklären.

Satz 7.1. *Ist $X$ eine Komponente der normalen Partition $\sigma$ der Gruppe $G$, ist weiter $(\mathfrak{N}X)^p\neq 1$ für jede Primzahl $p$, ist sogar $X^p\neq 1$ für jede Primzahl $p$, im Falle $\sigma\cap\mathfrak{N}X$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$ ist, so ist $\mathfrak{N}X=\mathfrak{N}\mathfrak{N}X$.*

Beweis. Unsere Behauptung ist trivialerweise richtig, falls $X=\mathfrak{N}X$ ist; und wir wollen deshalb im folgenden $X\neq\mathfrak{N}X$ annehmen. Dann ist die Komponente $X$ der normalen Partition $\sigma\cap\mathfrak{N}X$ ein eigentlicher Normalteiler von $\mathfrak{N}X$, so daß diese Partition insbesondere nicht einfach ist.

*Fall 1.* $\sigma\cap\mathfrak{N}X$ ist keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$.

Dann folgt aus Satz 5.1, (b), daß die sämtlichen, nicht in $X$ enthaltenen Elemente aus $\mathfrak{N}X$ die gleiche Primzahlordnung $p$ haben. Sei $T$ die Untergruppe von $\mathfrak{N}X$, die von den Elementen aus $\mathfrak{N}X$ mit von $p$ verschiedener Ordnung erzeugt wird. Da nach Voraussetzung $(\mathfrak{N}X)^p\neq 1$ ist, so ist auch $T\neq 1$; und wir haben gerade erwähnt, daß die Erzeugenden von $T$, und also auch $T$ selbst, in $X$ liegen. Damit haben wir gezeigt, daß $X$ eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}X$ enthält.

*Fall 2.* $\sigma\cap\mathfrak{N}X$ ist eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$.

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]. O. Kegel hat inzwischen die Nilpotenz einer solchen Komponente $A$ bewiesen.

Aus Satz 4.1, (4) folgt $X \leqq \mathfrak{F}\mathfrak{N}X$. Da die nilpotente Gruppe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ dann und nur dann primär ist, wenn ihr Zentrum $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ primär ist, so folgt aus Zusatz 4.2, (a):

$$X = \mathfrak{F}\mathfrak{N}X, \quad \text{wenn } \mathfrak{F}\mathfrak{N}X \text{ nicht primär ist.}$$

Wir nehmen weiter an, daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ eine $p$-Gruppe ist. Dann folgt aus unserer Voraussetzung $X^p \neq 1$. Es gibt also in der $p$-Gruppe $X$ ein Element $t$ der Ordnung $p^2$. Anwendung von Lemma 2.1 zeigt, daß jedes Zentrumselement aus $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ [wegen $X \leqq \mathfrak{F}\mathfrak{N}X$] in derselben Komponente wie $t$, also in $X$ liegt. Also wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}\mathfrak{N}X \leqq X$. Da das Zentrum einer von 1 verschiedenen nilpotenten Gruppe ebenfalls von 1 verschieden ist, so ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}\mathfrak{N}X \neq 1$.

Bedenken wir, daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ charakteristische Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ sind, so haben wir wieder gezeigt, daß $X$ eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}X$ enthält.

Nach dem eben Bewiesenen gibt es eine $1 < S \leqq X$ erfüllende charakteristische Untergruppe $S$ von $\mathfrak{N}X$. Ist $g$ ein Element aus $\mathfrak{N}\mathfrak{N}X$, so induziert $g$ einen Automorphismus in $\mathfrak{N}X$, der alle charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ invariant läßt. Also wird

$$1 < S = S^g \leqq X \cap X^g.$$

Da aber $X^g$ mit $X$ Komponente der normalen Partition $\sigma$ ist, so wird $X = X^g$. Also gehört $g$ zu $\mathfrak{N}X$; und wir haben $\mathfrak{N}X = \mathfrak{N}\mathfrak{N}X$ bewiesen.

BEMERKUNG 7.2. Ist $G$ eine nicht-abelsche Gruppe und $G^p = 1$ für eine geeignete Primzahl $p$, so bildet die Gesamtheit $\sigma$ aller zyklischen Untergruppen der Ordnung $p$ von $G$ eine normale Partition von $G$. Ist $X$ eine Komponente von $\sigma$, so ist $\mathfrak{N}X = \mathfrak{N}\mathfrak{N}X$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{N}X = G$ ist; und dies ist gleichwertig damit, daß $X$ ein Normalteiler von $G$ ist. Aus $G^p = 1$ und der Nicht-Kommutativität von $G$ folgt aber, daß nicht alle zyklischen Untergruppen Normalteiler von $G$ sind. Also gilt $\mathfrak{N}X = \mathfrak{N}\mathfrak{N}X$ nicht für alle Komponenten $X$ von $\sigma$. Damit ist die Unentbehrlichkeit der zweiten Voraussetzung von Satz 7.1 bewiesen.

BEMERKUNG 7.3. Ist etwa $G$ die alternierende Gruppe vom Grade 4, so enthält $G$ einen elementar-abelschen Normalteiler $K$ der Ordnung 4. Alle Elemente $\neq 1$ in $K$ haben die Ordnung 2; und die nicht in $K$ enthaltenen Elemente aus $K$ haben die Ordnung 3. Weiter ist $K$ der minimale Normalteiler von $G$. Eine normale Partition $\sigma$ von $G$ besteht aus den sämtlichen zyklischen Untergruppen $\neq 1$ von $G$. Ist $X$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung 2, so ist $\mathfrak{N}X = K < G = \mathfrak{N}\mathfrak{N}X$; und dies zeigt, daß auch die dritte Voraussetzung von Satz 7.1 unentbehrlich ist.

Wir benötigen eine leichte Verschärfung von Satz 4.1, (4).

LEMMA 7.4. *Ist der Subnormalteiler $S$ von $G$ nicht nilpotent und $\sigma$ eine Frobenius-Partition von $G$, so ist $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}G$ und $\sigma \cap S$ ist eine Frobenius-Partition von $S$.*

Hierbei werden wir [mit H. WIELANDT] unter einem Subnormalteiler von $G$ ein jedes Glied einer Normalkette von $G$ verstehen.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Untergruppen $S(i)$ von $G$ mit $S=S(n)$, $S(i)$ ist ein echter Normalteiler von $S(i-1)$, $S(0)=G$. Da $S$ in allen $S(i)$ enthalten und nicht nilpotent ist, so ist auch kein $S(i)$ nilpotent. — Wir machen nun die für $i=0$ erfüllte Induktionsannahme, daß, für ein gewisses $i$, $\sigma\cap S(i)$ eine Frobenius-Partition von $S(i)$ und $\mathfrak{F}G=\mathfrak{F}S(i)$ ist. Da der Normalteiler $S(i+1)$ von $S(i)$ nicht nilpotent ist, so ist er auch nicht in $\mathfrak{F}S(i)$ enthalten. Also können wir aus Satz 4.1, (4) schließen, daß

$$\mathfrak{F}S(i)\subseteqq S(i+1)$$

ist. Hieraus folgt sofort, daß $\mathfrak{F}S(i)$ als nilpotenter Normalteiler von $S(i+1)$ sogar in $\mathfrak{F}S(i+1)$ enthalten ist. Weiter ist $\mathfrak{F}S(i+1)$ als charakteristische Untergruppe des Normalteilers $S(i+1)$ ein nilpotenter Normalteiler von $S(i)$; und folglich ist $\mathfrak{F}S(i+1)\subseteqq\mathfrak{F}S(i)$. Also wird

$$\mathfrak{F}G=\mathfrak{F}S(i)=\mathfrak{F}S(i+1)<S(i+1)$$

wegen der Nicht-Nilpotenz von $S(i+1)$. Nach Voraussetzung gibt es eine normalisatorgleiche Komponente $A$ von $\sigma$; und es folgt aus Satz 4.1, (2), daß $A$ ein Komplement von $\mathfrak{F}G$ in $G$ ist. Aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt nun

$$S(i+1)=\mathfrak{F}G\cdot[A\cap S(i+1)]=\mathfrak{F}S(i+1)\cdot[A\cap S(i+1)].$$

Wegen $\mathfrak{F}S(i+1)<S(i+1)$ ist dann $1\neq A\cap S(i+1)=B$ eine Komponente von $\sigma\cap S(i+1)$. Ist $s$ ein Element aus dem Normalisator von $B$ in $S(i+1)$, so wird

$$1<B=B^s\subseteqq A\cap A^s.$$

Da $A^s$ mit $A$ eine Komponente der normalen Partition $\sigma$ ist, so wird $A=A^s$; und $s$ gehört zu $\mathfrak{N}A\cap S(i+1)=B$. Also ist $B$ eine normalisatorgleiche Komponente der normalen Partition $\sigma\cap S(i+1)$ von $S(i+1)$; und diese ist also eine Frobenius-Partition. Damit ist unser induktiver Beweis vollendet.

Satz 7.5. *Ist $\sigma$ eine normale Partition der Gruppe $G$ und $\mathfrak{F}G$ eine $p$-Gruppe, ist $S$ ein Subnormalteiler von $G$ und $\sigma\cap S$ eine Frobenius-Partition von $S$, dann ist $\mathfrak{F}S=\mathfrak{F}G$.*

Beweis. Als charakteristische Untergruppe des Subnormalteilers $S$ ist $\mathfrak{F}S$ ein nilpotenter Subnormalteiler von $G$. Daraus folgt bekanntlich, daß $\mathfrak{F}S$ in einem nilpotenten Normalteiler von $G$ enthalten ist — man benutze etwa die Tatsache, daß $T\cap P$ eine $p$-Sylow-Untergruppe von $T$ ist für jeden Subnormalteiler $T$ von $G$ und jede $p$-Sylow-Untergruppe $P$ von $G$. Also ist $\mathfrak{F}S\subseteqq\mathfrak{F}G\cap S$. Andererseits ist $\mathfrak{F}G\cap S$ ein nilpotenter Normalteiler von $S$ und also in $\mathfrak{F}S$ enthalten. Mithin wird

$$\mathfrak{F}S=S\cap\mathfrak{F}G.$$

Wäre $\mathfrak{F}S\neq\mathfrak{F}G$, so wäre $\mathfrak{F}G$ nicht in $S$ enthalten und $S$ wäre eine echte Untergruppe von $S\cdot\mathfrak{F}G$. Als Subnormalteiler von $G$ ist $S$ auch ein Subnormalteiler von $S\cdot\mathfrak{F}G$. Folglich ist $S$ echte Untergruppe seines Normalisators $T=\mathfrak{N}S\cap S\cdot\mathfrak{F}G$ in $S\cdot\mathfrak{F}G$. Aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt

$T = S(T \cap \mathfrak{F}G)$, so daß der nilpotente Normalteiler $T \cap \mathfrak{F}G$ von $T$ nicht in $S$ enthalten ist. Es ist sicherlich $T \cap \mathfrak{F}G \leqq \mathfrak{F}T$. Aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt weiter $\mathfrak{F}T = (T \cap \mathfrak{F}G)(S \cap \mathfrak{F}T)$. Da $S \cap \mathfrak{F}T$ ein nilpotenter Normalteiler des Normalteilers $S$ von $T$ ist, so wird $S \cap \mathfrak{F}T \leqq \mathfrak{F}S = S \cap \mathfrak{F}G$; und hieraus folgt

$$\mathfrak{F}T = T \cap \mathfrak{F}G.$$

Mit $\mathfrak{F}G$ sind $\mathfrak{F}T$ und $\mathfrak{F}S$ also $p$-Gruppen.

Da $\sigma \cap S$ eine Frobenius-Partition von $S$ ist, so folgt aus Satz 4.1, daß $\mathfrak{F}S$ eine eigentliche Hallsche, nilpotente, charakteristische, $(\sigma \cap S)$-zulässige Untergruppe von $S$ ist, und daß die normalisatorgleichen Komponenten von $\sigma \cap S$ genau die Komplemente von $\mathfrak{F}S$ in $S$ sind. Da $\mathfrak{F}S$ eine $p$-Gruppe ist, so ist die gemeinsame Ordnung $[S : \mathfrak{F}S]$ dieser Komplemente zu $p$ teilerfremd. Ist $R$ irgendein Komplement von $\mathfrak{F}S$ in $S$, so ist $R \cap \mathfrak{F}T = 1$, da $o(R)$ zu $p$ teilerfremd und $\mathfrak{F}T$ eine $p$-Gruppe ist; und aus

$$T = S(T \cap \mathfrak{F}G) = R \cdot \mathfrak{F}S \cdot (T \cap \mathfrak{F}G) = R(S \cap \mathfrak{F}G)(T \cap \mathfrak{F}G) = R(T \cap \mathfrak{F}G) = R \cdot \mathfrak{F}T$$

folgt, daß alle Komplemente von $\mathfrak{F}S$ in $S$ auch Komplemente von $\mathfrak{F}T$ in $T$ sind, deren Ordnung zur Ordnung der $p$-Gruppe $\mathfrak{F}T$ teilerfremd ist.

Aus $\mathfrak{F}S = S \cap \mathfrak{F}G = S \cap T \cap \mathfrak{F}G = S \cap \mathfrak{F}T$ folgt, daß $\mathfrak{F}S$ ein eigentlicher Normalteiler von $\mathfrak{F}T$ ist, da ja $S$ ein Normalteiler von $T = S \cdot \mathfrak{F}T$ ist. Da $\mathfrak{F}T$ nilpotent ist, so wird also $\mathfrak{F}S \cap \mathfrak{Z}\mathfrak{F}T \neq 1$. Folglich gibt es ein Element $z \neq 1$ in $\mathfrak{F}S \cap \mathfrak{Z}\mathfrak{F}T$.

Sei jetzt $x$ ein nicht in $\mathfrak{F}S$ enthaltenes Element aus $S$. Dann liegt $x$ in einer Komponente $X$ von $\sigma \cap S$. Da $X$ nicht in der $(\sigma \cap S)$-zulässigen Untergruppe $\mathfrak{F}S$ enthalten ist, so wird $X \cap \mathfrak{F}S = 1$; und wir folgern aus Satz 4.1, daß $X$ ein Komplement von $\mathfrak{F}S$ in $S$ ist. Also liegt jedes nicht in $\mathfrak{F}S$ enthaltene Element aus $S$ in einem Komplement von $\mathfrak{F}S$ in $S$, so daß insbesondere die Ordnung eines solchen Elements zu $p$ teilerfremd ist.

Sei wieder $x$ ein nicht in $\mathfrak{F}S$ enthaltenes Element aus $S$ und $f \neq 1$ ein mit $x$ vertauschbares Element aus $\mathfrak{F}T$. Dann ist $o(x)$ zu $p$ teilerfremd und $o(f)$ eine Potenz von $p$. Es folgt aus Lemma 2.1, daß $x$ und $f$ in der gleichen Komponente $W$ von $\sigma$ liegen. Da $z$ in $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}T$ liegt, so sind $z$ und $f$ vertauschbar. Also sind auch $zx$ und $f$ vertauschbar. Da $z$ in $\mathfrak{F}S$ liegt, $x$ aber nicht, so ist $zx$ ein nicht in $\mathfrak{F}S$ gelegenes Element aus $S$. Also ist auch $o(zx)$ zu $p$ teilerfremd; da die Ordnung von $f$ eine Potenz von $p$ ist, so folgt aus Lemma 2.1, daß $zx$ und $f$ in der gleichen Komponente von $\sigma$ liegen. Wegen $f \neq 1$ liegt also auch $zx$ in $W$. Folglich enthält $W$ die Elemente $x$, $zx$ und $z$. Aus $1 \neq x$ folgt, daß $W \cap S$ die eindeutig bestimmte Komponente von $\sigma \cap S$ ist, die $x$ enthält. Diese ist, wie oben gezeigt, ein Komplement von $\mathfrak{F}S$ in $S$, so daß $1 = (W \cap S) \cap \mathfrak{F}S = W \cap \mathfrak{F}S$ wird. Andererseits gehört $z \neq 1$ zu $W \cap \mathfrak{F}S$; und wir sind zu einem Widerspruch geführt worden. Also ist 1 das einzige Element aus $\mathfrak{F}T$, mit dem ein nicht in $\mathfrak{F}S$ enthaltenes Element aus $S$ vertauschbar ist.

Ist $R$ ein Komplement von $\mathfrak{F}S$ in $S$, so ist $R$ auch ein Komplement von $\mathfrak{F}T$ in $T$. Wir bilden den Normalisator $R^* = \mathfrak{N}R \cap T$ von $R$ in $T = R \cdot \mathfrak{F}T$.

Aus dem Dedekindschen Modulsatz und $R \subseteqq R^* \subseteqq R \cdot \mathfrak{F}T$ folgt $R^* = R(R^* \cap \mathfrak{F}T)$. Ist $t$ ein Element aus $R^* \cap \mathfrak{F}T$, so wird

$$t \circ R \subseteqq R \cap \mathfrak{F}T = 1,$$

da $\mathfrak{F}T$ als Normalteiler von $T$ von den Elementen aus $R$ normalisiert wird. Das einzige Element aus $\mathfrak{F}T$, das mit allen Elementen aus $R$ vertauschbar ist, ist aber, wie oben gezeigt, die Eins. Also wird $t = 1$; und hieraus folgt $R^* \cap \mathfrak{F}T = 1$ und also $R = R^*$. Jedes Komplement von $\mathfrak{F}S$ in $S$ ist also gleich seinem Normalisator in $T$.

Ist $R$ ein Komplement von $\mathfrak{F}S$ in $S$, so ist $R$ eine Komponente von $\sigma \cap S$. Also gibt es eine und nur eine Komponente $V$ von $\sigma$ mit $R = S \cap V$. Ist $U = T \cap V$, so wird $R \subseteqq U \subseteqq R \cdot \mathfrak{F}T$; und wir folgern

$$U = R(U \cap \mathfrak{F}T) = R(V \cap \mathfrak{F}T) = R(U \cap \mathfrak{F}G)$$

aus dem Dedekindschen Modulsatz. Angenommen $U \cap \mathfrak{F}T$ wäre nicht gleich 1. Dann wäre, da ja $z$ in $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}T$ liegt,

$$1 \neq U \cap \mathfrak{F}T = (U \cap \mathfrak{F}T)^z \subseteqq V \cap V^z.$$

Da $V^z$ mit $V$ eine Komponente der normalen Partition $\sigma$ ist, so wird $V = V^z$ und also

$$U^z = T^z \cap V^z = T \cap V = U.$$

Folglich liegt $z \circ R$ in $U$. Da aber $z$ in der charakteristischen Untergruppe $\mathfrak{F}S$ des Normalteilers $S$ von $T$ liegt, so liegt $z \circ R$ auch in $\mathfrak{F}S$. Es folgt, daß

$$z \circ R \subseteqq U \cap \mathfrak{F}S = U \cap S \cap \mathfrak{F}S = T \cap V \cap S \cap \mathfrak{F}S = T \cap R \cap \mathfrak{F}S = 1$$

wird. Das einzige Element aus $\mathfrak{F}S$, das mit allen Elementen aus $R$ vertauschbar ist, ist aber die 1. Dieses widerspricht $z \neq 1$; und aus diesem Widerspruch folgt $U \cap \mathfrak{F}T = 1$ und also $U = R$. Damit haben wir gezeigt, daß $U = R$ eine normalisatorgleiche Komponente von $\sigma \cap T$ ist, daß also auch $\sigma \cap T$ eine Frobenius-Partition ist.

Da $\sigma \cap S$ eine Frobenius-Partition von $S$ ist, so ist $S$ gewiß nicht nilpotent. $S$ ist aber ein Normalteiler von $T$ und $\sigma \cap T$ ist eine Frobenius-Partition von $T$. Anwendung von Lemma 7.4 zeigt, daß $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}T$ ist. Also wird

$$T = S(T \cap \mathfrak{F}G) = S \cdot \mathfrak{F}T = S \cdot \mathfrak{F}S = S \neq T;$$

und aus diesem Widerspruch folgt das gewünschte $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}G$.

Zusatz 7.6. *Ist $\sigma$ eine normale Partition und $S$ ein Subnormalteiler der Gruppe $G$, ist $\sigma \cap S$ eine Frobenius-Partition von $S$, enthält $\mathfrak{F}S$ eine Komponente von $\sigma$, so ist $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}G$.*

Beweis. Dies ist wegen Satz 7.5 sicher richtig, wenn $\mathfrak{F}G$ eine Primärgruppe ist. Ist aber $\mathfrak{F}G$ keine Primärgruppe, so ist auch $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$ keine Primärgruppe; und es folgt aus Folgerung 2.3 die Existenz einer $\mathfrak{F}G$ enthaltenden

Komponente $B$ von $\sigma$. Da $S$ ein Subnormalteiler von $G$ ist, so ist auch $\mathfrak{F}S$ ein nilpotenter Subnormalteiler von $G$; und als solcher ist $\mathfrak{F}S$ in $\mathfrak{F}G$ enthalten. Nach Voraussetzung gibt es eine in $\mathfrak{F}S$ enthaltene Komponente $A$ von $\sigma$. Folglich wird

$$A \subseteq \mathfrak{F}S \subseteq \mathfrak{F}G \subseteq B.$$

Da aber keine Komponente von $\sigma$ echte Untergruppe einer anderen Komponente sein kann, so wird $A = B$ und also auch $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}G$.

BEMERKUNG 7.7. Sind $p$ und $q$ Primzahlen, ist $p$ ein Teiler von $q-1$, so gibt es eine nicht-abelsche Gruppe $S$ der Ordnung $pq$. Diese besitzt einen zyklischen Normalteiler $Q$ der Ordnung $q$. Weiter sei $G$ das direkte Produkt von $S$ und einer zyklischen Gruppe $Z$ der Ordnung $p$. Jedes nicht in $QZ$ gelegene Element von $G$ hat die Ordnung $p$; und $QZ$ ist ein zyklischer Normalteiler der Ordnung $pq$ von $G$. Eine normale Partition $\sigma$ von $G$ besteht dann aus $\mathfrak{F}G = QZ$ und den nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen der Ordnung $p$. Weiter ist $S$ ein Normalteiler von $G$, $\sigma \cap S$ eine Frobenius-Partition von $S$, aber $\mathfrak{F}S = Q < \mathfrak{F}G$. Es genügt also nicht, in Satz 7.5 und Zusatz 7.6 zu fordern, daß $\sigma$ eine normale Partition von $G$ und $S$ ein Subnormalteiler von $G$ mit Frobenius-Partition $\sigma \cap S$ sei, daß vielmehr die hierüber hinausgehenden Voraussetzungen wirklich benötigt werden.

## Literatur


BACHMANN, G.: Geometry in certain finite groups. Math. Z. **70**, 466–479 (1959).

BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2nd Edit. Cambridge 1911.

HALL jr., M.: The Theory of Groups. New York 1959.

HUGHES, D. R., and J. G. THOMPSON: The $H_p$-problem and the structure of the $H_p$-groups. Pac. J. of Math. **9**, 1097–1102 (1959).

KEGEL, O. H.: Die Nilpotenz der $H_p$-Gruppen. Math. Z. **75**, 373–376 (1961).

KONTOROWITSCH, P.: Sur la réprésentation d'un groupe fini sous la forme d'une somme directe de sous-groupes. Mat. Sbornik **5**, 283–296 (1939); **7**, 27–33 (1940).

SAH, C.: On a generalization of finite nilpotent groups. Math. Z. **68**, 189–204 (1958).

SUZUKI, M.:

[1] On the finite groups with a complete partition. J. Math. Soc. Japan **2**, 165–185 (1950).

[2] On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes. Amer. J. Math. **77**, 657–691 (1955).

[3] A new type of simple groups of finite order. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **46**, 868–870 (1960).

THOMPSON, J. G.:

[1] Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **45**, 578–581 (1959).

[2] Normal $p$-complements for finite groups. Math. Z. **72**, 332–354 (1960).

YOUNG, J. W.: On the partitions of a group and the resulting classifications. Bull. Amer. Math. Soc. **33**, 453–461 (1927).

ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Berlin u. Leipzig 1937.


*Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt a. M.*

*(Eingegangen am 22. November 1960)*

KEGEL, O. H.
Math. Zeitschr. 75, 373—376 (1961)

# Die Nilpotenz der $H_p$-Gruppen

Von
OTTO H. KEGEL

In einer kürzlich erschienenen Arbeit [3] beschäftigen sich HUGHES und THOMPSON mit endlichen Gruppen, die einen Automorphismus $s$ der Primzahlordnung $p$ besitzen, der für alle $g \in G$ die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad g^{1+s+s^2+\cdots+s^{p-1}} = 1 \quad \text{erfüllt.}$$

Für diese Gruppen bewiesen sie ([3], Theorem 2 und 3) die folgende Strukturaussage:

($H-T$) *Besitzt eine endliche Gruppe $G$ einen Automorphismus $s$ von Primzahlordnung $p$, der auf $G$ die Gleichung* (I) *erfüllt, und ist $G$ keine $p$-Gruppe, so wird $G$ bereits von all den Elementen erzeugt, deren Ordnungen ungleich $p$ sind; $G$ besitzt eine nilpotente, charakteristische Untergruppe $K$ derart, daß $G/K$ eine $p$-Gruppe ist und $(o(K), p) = 1$. — $G$ ist also auflösbar.*

(Gruppen, die den Voraussetzungen der Aussage ($H-T$) genügen, werden in [3] mit $H_p$-Gruppen bezeichnet.)

In dieser Note soll gezeigt werden, daß man diesen Satz zugleich verschärfen und (trivial) verallgemeinern kann zu

SATZ 1. *Besitzt die endliche Gruppe $G$ einen Automorphismus $s$ von Primzahlordnung $p$, der für alle $g \in G$ die Gleichung* (I) *erfüllt, so ist $G$ nilpotent.*

BEWEIS. Angenommen, der Satz sei falsch; dann gibt es unter den endlichen Gruppen, die Gegenbeispiele bilden, eine Gruppe $G$ von minimaler Ordnung. — Da $G$ nicht nilpotent ist, also auch keine $p$-Gruppe, so gelten die Ergebnisse aus [3] für $G$; insbesondere gilt für die Untergruppe $G\{s\} = H$ des Holomorphs von $G$ die Gleichung $[H:G] = p$, und jedes Element $x \in H$, $x \notin G$ hat die Ordnung $p$. $G$ besitzt einen nilpotenten Normalteiler $K$, derart daß $(o(K), p) = 1$ und $G/K$ eine $p$-Gruppe ist. — Sei $P_1$ eine $p$-Sylow-Gruppe von $H$, die $s$ enthält.

a) *$G$ besitzt eine $s$-zulässige $p$-Sylow-Gruppe $P$ und ein $s$-invariantes Element der Ordnung $p$*; denn da $G$ Normalteiler von $H$ ist, so ist $G \cap P_1 = P$ eine $p$-Sylow-Gruppe von $G$, die als Normalteiler von $P_1$ natürlich $s$-zulässig ist. Es ist $P \neq 1$; denn sonst wäre $G = K$ nilpotent. Ist aber der Normalteiler $\tilde{P}$ von $P_1$ ungleich 1, so enthält er auch Zentrumselemente ungleich 1 von $P_1$. Ein Zentrumselement der Ordnung $p$ ist aber natürlich $s$-zulässig.

b) *Jede echte s-zulässige Untergruppe von G und jede Faktorgruppe von G nach einem s-zulässigen Normalteiler* $\neq 1$ *von G ist nilpotent*; denn auf beiden induziert $s$ Automorphismen, die für alle Elemente die Gleichung (I) erfüllen und entweder die Ordnung $p$ haben, oder die Identität sind. Erfüllt die Identität die Gleichung (I), so heißt das, daß jedes Element die Ordnung $p$ hat, und die Nilpotenz folgt. Ist aber der von $s$ induzierte Automorphismus von der Identität verschieden, so folgt die Aussage b) aus der Minimalität von $G$.

c) *Das Zentrum* $\mathfrak{Z}G = 1$; denn es ist $s$-zulässig. Eine Gruppe ist aber genau dann nilpotent, wenn ihre Zentrumsfaktorgruppe nilpotent ist. $G$ ist nicht nilpotent, und daher folgt aus b), daß $\mathfrak{Z}G = 1$ ist.

d) *Die nilpotente, charakteristische Untergruppe K von G ist abelsch.* Andernfalls wäre $\mathfrak{Z}K \neq K$ und $P \cdot \mathfrak{Z}K$ wäre eine echte $s$-zulässige Untergruppe von $G$ und daher nach b) nilpotent. Dann zentralisierte aber $P$ auch $\mathfrak{Z}K$, so daß $\mathfrak{Z}K \leqq \mathfrak{Z}G$. Wegen $K \neq 1$ ist $\mathfrak{Z}K \neq 1$, und c) führt also die Annahme $\mathfrak{Z}K \neq K$ zu einem Widerspruch.

e) *P ist zyklisch der Ordnung p.* Es gibt nach a) ein $s$-invariantes Element $t$ der Ordnung $p$ in $P$. Wäre nun $o(P) \neq p$, so wäre $K\{t\}$ eine echte $s$-zulässige Untergruppe von $G$ und daher nach b) sogar nilpotent. Dann läge aber $t$ im Zentralisator $\mathfrak{C}K$ von $K$, und es wäre $t \in \mathfrak{Z}G$, was wegen c) unmöglich ist.

f) *Es gibt ein nicht in K enthaltenes Element w von G mit* $o(w) \neq p$. Die Gruppe $G$ ist nach dem Struktursatz $(H-T)$ von Elementen der Ordnung ungleich $p$ erzeugt. Gäbe es nun kein solches $w$, so wäre $G = K$, was der Aussage $P \neq 1$ widerspricht.

Nun ist $w^p = k \neq 1$ ein Element aus $K$, und $w$ hat die Form $w = kg = gk$ mit $o(g) = p$. Aus d) und e) ergibt sich dann, daß $k \in \mathfrak{Z}G$ ist. Dies ist aber wegen c) unmöglich. — Dieser Widerspruch zeigt, daß es kein solches $G$ geben kann. Damit ist Satz 1 bewiesen.

BEMERKUNG. Satz 1 verallgemeinert einen Satz von THOMPSON ([4], Theorem 1), der besagt, daß eine Gruppe $G$ nilpotent ist, wenn sie einen Automorphismus $s$ von Primzahlordnung besitzt, der keine Fixelemente $\neq 1$ in $G$ hat; denn eine solche Gruppe ist in der Untergruppe $H = G\{s\}$ des Holomorph von $G$ von allen Elementen von $H$ erzeugt, deren Ordnung ungleich $o(s)$ ist. Aus ([3], Theorem 2) folgt dann, daß $s$ die Gl. (I) für alle Elemente $g \in G$ erfüllt.

Dagegen genügt es nicht, um auf die Nilpotenz von $G$ schließen zu können, daß man von dem Automorphismus $s$ von Primzahlordnung $p$ nur fordert, daß seine Fixelemente in $G$ höchstens $p$-Potenzordnung haben. Dies zeigt die nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 6. Daß man unter dieser schwachen Voraussetzung nicht auf die Auflösbarkeit von $G$ schließen kann, zeigt die einfache Gruppe der Ordnung 60.

Als Anwendung von Satz 1 ergibt sich eine recht scharfe Aussage über die Struktur der Komponenten einer nicht-trivialen Partition einer endlichen Gruppe $G$. — Dabei verstehen wir unter einer *nicht-trivialen Partition* $\pi$ *von G eine Menge* $(A_i)$ nicht-trivialer Untergruppen $A_i$ von $G$ derart, daß jedes

Element $g \neq 1$ aus $G$ in genau einem der $A_i$ liegt. Die Untergruppen $A_i$ nennt man die *Komponenten* der Partition $\pi$ von $G$. Eine ausführliche Diskussion nicht-trivialer Partitionen findet man bei BAER [1]. Eine Untergruppe $U \neq 1$ von $G$ nennen wir *$\pi$-zulässig*, wenn jede Komponente von $\pi$ entweder ganz in $U$ enthalten ist, oder aber kein Element $\neq 1$ mit $U$ gemein hat.

Wir beweisen nun den folgenden

SATZ 2. *Ist $\pi$ eine nicht-triviale Partition der endlichen Gruppe $G$, und ist $U \neq G$ eine $\pi$-zulässige Untergruppe von $G$, dann ist entweder $U = \mathfrak{N}U$, oder aber $U$ ist nilpotent.* Dabei bedeutet $\mathfrak{N}U$ den Normalisator von $U$ in $G$.

BEWEIS. Nimmt man $U < \mathfrak{N}U$ an, dann betrachte man die von $\pi$ in $\mathfrak{N}U$ induzierte Partition $\pi \cap \mathfrak{N}U$ (ihre Komponenten sind die Durchschnitte von $\mathfrak{N}U$ mit den Komponenten $A_i$ von $\pi$, die $A_i \cap \mathfrak{N}U \neq 1$ erfüllen). Ausgehend von der nicht-trivialen Partition $\pi \cap \mathfrak{N}U$ von $\mathfrak{N}U$ definieren wir nun eine (i.a. von $\pi \cap \mathfrak{N}U$ verschiedene) nicht-triviale Partition $\tau$ von $\mathfrak{N}U$: Jede Komponente von $\pi \cap \mathfrak{N}U$, die mit $U$ kein Element $\neq 1$ gemein hat, ist Komponente von $\tau$; $U$ selbst ist Komponente von $\tau$. — Es ist klar, daß hierdurch die Partition $\tau$ eindeutig definiert ist.

Aus $U \neq \mathfrak{N}U$ und der Nicht-Trivialität von $\tau$ folgt die Existenz von Elementen in $\mathfrak{N}U$, die nicht in $U$ liegen und deren Ordnung eine Primzahl ist ([1], Lemma 2.1). Ist nun $g$ ein solches Element, so folgt aus ([1], Lemma 2.1), daß jedes Element aus $U\{g\}$, das nicht in $U$ liegt, die Ordnung $p$ hat; denn es liegt in einer Komponente $\neq U$ von $\tau$. Dann liegt aber die Gruppe $H_p(U\{g\})$, die von allen Elementen von $U\{g\}$ erzeugt wird, deren Ordnung ungleich $p$ ist, in dem Normalteiler $U$ von $U\{g\}$.

Wäre nun $U$ nicht nilpotent, also insbesondere keine $p$-Gruppe, dann besagt ([3], Theorem 1), daß $[U\{g\} : H_p(U\{g\})] = p$ ist, also $H_p(U\{g\}) = U$. Nach ([3], Theorem 2) besitzt $U$ aber dann einen Automorphismus der Ordnung $p$ (z.B. den von $g$ induzierten), der die Gl. (I) erfüllt. Dann folgt aber aus Satz 1 die Nilpotenz von $U$. Das wäre ein Widerspruch. — Also ist $U$ nilpotent, und der Satz ist bewiesen.

BEMERKUNG. Ist $U = \mathfrak{N}U$, so scheint es schwer, etwas über die Struktur von $U$ auszusagen. — Ist aber $U$ eine Komponente von $\pi$ und ist mit $U$ auch jede zu $U$ konjugierte Untergruppe von $G$ eine Komponente von $\pi$ (in Analogie zu [1] könnte man sagen, $\pi$ ist *normal bezüglich der Komponente $U$*), so kann man aus einem Ergebnis von BURNSIDE ([2], p. 334—335) folgern, daß keine $p$-Sylow-Gruppe von $U$ für $p \mid o(U)$ eine nicht-zyklische elementarabelsche Untergruppe enthält. — Da man zu einem solchen $U$ eine nicht-triviale Partition von $G$ konstruieren kann (nach FROBENIUS), die außer $U$ und seinen Konjugierten nur noch eine Komponente besitzt (also eine Frobenius-Partition, die sogar Hallsch ist), so findet man weitere Auskunft über die Struktur solcher $U$ in ([1], Kapitel 4). Insbesondere gestattet ein solches $U$ selbst keine nicht-triviale Partition.

Hat man anstelle des Struktursatzes von HUGHES und THOMPSON den Satz 1 zur Verfügung, so vereinfachen sich in [1] einige Beweise, und einige

Sätze lassen sich schärfer fassen. Dies ist insbesondere an den Stellen von [1] der Fall, an denen $\pi$-zulässige Normalteiler $\neq G$ von $G$ betrachtet werden. So zeigt Satz 2, daß die Voraussetzungen von ([1], Lemma 3.3) nicht erfüllt werden können, denn ein $\pi$-zulässiger Normalteiler $K \neq G$ ist nilpotent.

## Literatur

[1] Baer, R.: Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **75**, 333—372 (1961).
[2] Burnside, W.: Theory of groups of finite order, 2nd edition. Cambridge 1911.
[3] Hughes, D. R., and J. G. Thompson: The $H_p$-problem and the structure of $H_p$-groups. Pac. J. Math. **9**, 1097—1102 (1959).
[4] Thompson, J. G.: Finite groups with fix-point-free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Acad. Sciences (USA) **45**, 578—581 (1959).

*Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität*
*(Eingegangen am 24. Dezember 1960)*

Schoch, M.
Math. Zeitschr. 75, 377–384 (1961)

# Integration einer Klasse linearer Differentialgleichungen[1])

Von
Manfred Schoch

## 1. Problemstellung

In dieser Untersuchung soll für die Klasse der Differentialgleichungen

$$y^{(n)}(x)+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{P^{(n-i-1)}(x)}{P(x)}\,Q(x)\,y(x)\right]^{(i)}=f(x) \tag{1}$$

die allgemeine Lösung bestimmt werden. Die freie Funktion $f(x)$ sei dabei in einem Intervall $[x_0, x_1]$ stetig. Das Polynom

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n-1} a_j\,x^j \tag{2}$$

höchstens $(n-1)$-ten Grades und die Funktion $Q(x)$ sollen so beschaffen sein, daß im Intervall $[x_0, x_1]$ die Ausdrücke

$$\frac{P^{(n-i-1)}(x)}{P(x)}\,Q(x);\quad i=0,1,\ldots,n-1$$

jeweils $i$-mal stetig differenzierbar sind.

Schreiben wir die Differentialgleichung (1) in der Form

$$y^{(n)}(x)+\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)\,y^{(i)}(x)=f(x), \tag{1'}$$

dann lauten die Koeffizienten von $y^{(i)}(x)$

$$b_i(x)=\sum_{j=i}^{n-1}\binom{j}{i}\left[\frac{P^{(n-j-1)}(x)}{P(x)}\,Q(x)\right]^{(j-i)};\quad i=0,1,\ldots,n-1. \tag{3}$$

Diese Koeffizienten sind auf Grund der Voraussetzungen über $F(x)$ und $Q(x)$ in $[x_0, x_1]$ sicher $i$-mal stetig differenzierbar.

## 2. Überführung der Differentialgleichung (1) in eine Volterrasche Integralgleichung

Nach einem Verfahren, das von Kneschke [*1*] entwickelt wurde, lassen sich gewisse Randwertaufgaben für Differentialgleichungen der Gestalt (1) in

[1]) Über die folgenden Ergebnisse wurde schon zur GAMM-Tagung 1960 in Freiberg/Sa. kurz berichtet.

zu ihnen äquivalente Integralgleichungen überführen[2]). Dabei benutzt man jeweils ein den Randbedingungen entsprechendes Interpolationstheorem und wendet auf die Differentialgleichung einen Integraloperator an, der im wesentlichen durch die Interpolationspolynome bestimmt ist. Nach mehrfacher partieller Integration und einigen Umformungen erhält man dann eine der Randwertaufgabe äquivalente Integralgleichung. Ein besonderer Vorteil dieses Verfahrens ist, daß bei seiner Anwendung weder ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung verwendet wird noch ein anderes Randwertproblem zu lösen ist.

In dem einfachen Fall der Anfangswertaufgabe erhalten wir als Äquivalent eine Volterrasche Integralgleichung mit ausgeartetem Kern. Als zugehöriges Interpolationstheorem tritt hier die Taylorsche Formel

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!}\, y^{(j)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, y^{(n)}(\xi)\, d\xi \tag{4}$$

auf, während der auf die Differentialgleichung anzuwendende Integraloperator jetzt

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \cdots d\xi \tag{5}$$

ist. Im allgemeinen stimmt der Rang des Kernes der Volterraschen Gleichung mit der Ordnung der Differentialgleichung überein. Wir werden jedoch feststellen, daß sich in unserem Falle der Rang auf eins reduziert.

Wir denken uns die Differentialgleichung (1) durch die Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

mit völlig beliebigen Zahlen $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ zu einem Anfangswertproblem ergänzt und wenden auf die in der Variablen $\xi$ geschriebene Differentialgleichung (1)

$$y^{(n)}(\xi) + \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{P^{(n-i-1)}(\xi)}{P(\xi)}\, Q(\xi)\, y(\xi) \right]^{(i)} = f(\xi)$$

den Operator (5) an. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, y^{(n)}(\xi)\, d\xi + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \left[ \frac{P^{(n-i-1)}(\xi)}{P(\xi)}\, Q(\xi)\, y(\xi) \right]^{(i)} d\xi \\ &\qquad = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{6}$$

Mehrfache partielle Integration liefert

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, y^{(n)}(\xi)\, d\xi = y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\, y^{(n-j-1)}(x_0) \tag{7}$$

[2]) Dieses Verfahren wurde hinsichtlich der Randbedingungen erweitert [2], [3].

und

$$(8)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{P^{(n-i-1)}(\xi)}{P(\xi)}\,Q(\xi)\,y(\xi)\right]^{(i)} d\xi = -\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(x-x_0)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\times \\ \times\left[\frac{P^{(n-i-1)}(\xi)}{P(\xi)}\,Q(\xi)\,y(\xi)\right]_{\xi=x_0}^{(i-j-1)} + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\,\frac{P^{(n-i-1)}(\xi)}{P(\xi)}\,Q(\xi)\,y(\xi)\,d\xi. \end{cases}$$

Damit erhalten wir aus (6) die Integralgleichung

$$(9)\quad y(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x-\xi)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\,P^{(n-i-1)}(\xi)\right\}y(\xi)\,d\xi = F(x),$$

wobei die freie Funktion $F(x)$ die Gestalt

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\overline{C}_i\frac{(x-x_0)^{i-1}}{(i-1)!}+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f(\xi)\,d\xi$$

bzw.

$$(10)\quad F(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i x^{i-1}+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f(\xi)\,d\xi$$

besitzt. Wegen der ausgeführten partiellen Integrationen treten in $F(x)$ ursprünglich die frei wählbaren Größen $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ auf, die durch Umordnen die willkürlichen Konstanten $\overline{C}_i$ bzw. $C_i$ erzeugen. Die in (9) unter dem Integralzeichen auftretende Summe ist gerade die Taylor-Entwicklung von $P(x)$ an der Stelle $\xi$, es gilt also

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x-\xi)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\,P^{(n-i-1)}(\xi)=P(x).$$

Aus (9) ergibt sich somit

$$(11)\quad y(x)+P(x)\int_{x_0}^{x}\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,y(\xi)\,d\xi=F(x).$$

Dies ist eine Volterrasche Integralgleichung mit ausgeartetem Kern vom Rang eins. Nach unseren Voraussetzungen sind die Funktionen $P(x)$ und

$$(12)\quad R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$$

im Intervall $[x_0, x_1]$ stetig.

### 3. Lösung der Integralgleichung (11)[3]

Die Lösung der Integralgleichung (11) hat für $x_0 \leqq x \leqq x_1$ die Gestalt[4]

$$(13)\quad y(x)=F(x)-\int_{x_0}^{x}L(x,\xi)\,F(\xi)\,d\xi.$$

[3]) Das folgende Lösungsverfahren läßt sich auf jede Integralgleichung

$$y(x)+A(x)\int_{a}^{x}B(\xi)\,y(\xi)\,d\xi=g(x)$$

mit stetigen $A$, $B$ und $g$ anwenden.

[4]) Siehe [4], S. 243ff.

Dabei ist die Resolvente $L(x, \xi)$ durch

$$L(x,\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} K^{(\nu)}(x,\xi) \tag{14}$$

mit

$$\begin{cases} K^{(0)}(x,\xi) = P(x)\,R(\xi), \\ K^{(\nu)}(x,\xi) = \int\limits_{\xi}^{x} K^{(0)}(x,t)\,K^{(\nu-1)}(t,\xi)\,dt; \quad \nu = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{15}$$

gegeben.

Wir behaupten, daß in unserem Falle

$$K^{(\nu)}(x,\xi) = \frac{P(x)\,R(\xi)}{\nu!}\left\{\int\limits_{\xi}^{x} P(t)\,R(t)\,dt\right\}^{\nu}; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

gilt. Für $\nu = 0$ ist die Behauptung trivial. Unter der Annahme

$$K^{(\nu-1)}(x,\xi) = \frac{P(x)\,R(\xi)}{(\nu-1)!}\left\{\int\limits_{\xi}^{x} P(t)\,R(t)\,dt\right\}^{\nu-1}; \quad \nu \geqq 1$$

beweisen wir die Gültigkeit von (16) für $K^{(\nu)}(x, \xi)$. Nach (15) ist

$$K^{(\nu)}(x,\xi) = \frac{P(x)\,R(\xi)}{(\nu-1)!}\int\limits_{\xi}^{x} P(t)\,R(t)\left\{\int\limits_{\xi}^{t} P(z)\,R(z)\,dz\right\}^{\nu-1} dt. \tag{17}$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int\limits_{\xi}^{x} P(t)\,R(t)\left\{\int\limits_{\xi}^{t} P(z)\,R(z)\,dz\right\}^{\nu-1} dt = \left\{\int\limits_{\xi}^{x} P(t)\,R(t)\,dt\right\}^{\nu} -$$

$$- (\nu-1)\int\limits_{\xi}^{x} P(t)\,R(t)\left\{\int\limits_{\xi}^{t} P(z)\,R(z)\,dz\right\}^{\nu-1} dt,$$

und daraus folgt

$$\int\limits_{\xi}^{x} P(t)\,R(t)\left\{\int\limits_{\xi}^{t} P(z)\,R(z)\,dz\right\}^{\nu-1} dt = \frac{1}{\nu}\left\{\int\limits_{\xi}^{x} P(t)R(t)\,dt\right\}^{\nu}.$$

Damit ergibt sich aus (17) die Behauptung (16).

Durch Einführen von (16) in (14) erhält die Resolvente die Form

$$L(x,\xi) = P(x)\,R(\xi)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\left\{\int\limits_{\xi}^{x} P(t)\,R(t)\,dt\right\}^{\nu}.$$

Die hierin auftretende Reihe hat die Summe

$$e^{\int\limits_{\xi}^{x} P(t)\,R(t)\,dt},$$

so daß

$$L(x,\xi) = P(x)\,R(\xi)\,e^{\int_x^\xi P(t)\,R(t)\,dt} \tag{18}$$

gilt. Nach (14) lautet also die Lösung von (11)

$$y(x) = F(x) - P(x)\int_{x_0}^{x} R(\xi)\,e^{\int_x^\xi P(t)\,R(t)\,dt}\,F(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

### 4. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1)

In (19) führen wir jetzt die durch (10) gegebene von den willkürlichen Konstanten $C_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ abhängige Funktion $F(x)$ ein und ersetzen $R(x)$ gemäß (12). Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} y(x) = &\sum_{i=1}^{n} C_i\left\{x^{i-1} - P(x)\int_{x_0}^{x}\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,e^{\int_x^\xi Q(t)\,dt}\,\xi^{i-1}\,d\xi\right\} + \\ &+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,f(\xi)\,d\xi - P(x)\int_{x_0}^{x}\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,e^{\int_x^\xi Q(t)\,dt}\left\{\int_{x_0}^{\xi}\frac{(\xi-z)^{n-1}}{(n-1)!}\,f(z)\,dz\right\}d\xi. \end{aligned} \tag{20}$$

Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Potenzen $x^{i-1}$ sind auch die Funktionen

$$y_i(x) = x^{i-1} - P(x)\int_{x_0}^{x}\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,e^{\int_x^\xi Q(t)\,dt}\,\xi^{i-1}\,d\xi; \qquad i=1,2,\ldots,n,$$

die in (20) als Faktoren bei den Konstanten $C_i$ auftreten, linear unabhängig. Aus

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\,y_i(x) = 0 \tag{21}$$

folgt nämlich

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\,x^{i-1} - P(x)\int_{x_0}^{x}\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,e^{\int_x^\xi Q(t)\,dt}\left\{\sum_{i=1}^{n} q_i\,\xi^{i-1}\right\}d\xi = 0. \tag{22}$$

Als homogene Volterrasche Integralgleichung zweiter Art für $\sum_{i=1}^{n} q_i x^{i-1}$ besitzt (22) nur die triviale Lösung

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\,x^{i-1} \equiv 0,$$

weshalb (21) nur für $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$ gelten kann.

Wegen der Äquivalenz zwischen den Problemen (1) und (11) löst die durch (20) gegebene Funktion $y(x)$ mit der Integralgleichung (11) auch die Differentialgleichung (1). Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $y_i(x)$ und weil die Konstanten $C_i$ völlig beliebig sind, bilden die $y_i(x)$ ein Fundamentalsystem der zu (1) gehörigen homogenen Differentialgleichung,

während die Funktion

$$\eta(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f(\xi)\,d\xi-P(x)\int_{x_0}^{x}\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}e^{\int_{x}^{\xi}Q(t)\,dt}\left\{\int_{x_0}^{x}\frac{(\xi-z)^{n-1}}{(n-1)!}f(z)\,dz\right\}d\xi$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. In (20) haben wir somit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) gefunden.

## 5. Beispiele

Zum Schluß wollen wir durch spezielle Wahl von $P(x)$, $Q(x)$ und von $n$ noch einige Beispiele angeben.

BEISPIEL 1. Wenn $P(x)=\text{konst.}$ ist, dann erhalten wir aus (1)

$$y^{(n)}(x)+[Q(x)\,y(x)]^{(n-1)}=f(x). \tag{23}$$

Aus (20) ergibt sich nach partieller Integration und Umbenennung der Konstanten als Lösung von (23) für $n\geqq 2$

$$\left\{\begin{aligned} y(x)&=C_1\,e^{-\int_{x_0}^{x}Q(t)\,dt}+\sum_{i=2}^{n}C_i\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x}^{\xi}Q(t)\,dt}\,\xi^{i-2}\,d\xi+\\ &\quad+\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x}^{\xi}Q(t)\,dt}\left\{\int_{x_0}^{\xi}\frac{(\xi-z)^{n-2}}{(n-2)!}f(z)\,dz\right\}d\xi. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Im Falle $n=1$ erhalten wir

$$y(x)=C_1\,e^{-\int_{x_0}^{x}Q(t)\,dt}+\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x}^{\xi}Q(t)\,dt}f(\xi)\,d\xi. \tag{24'}$$

Für $n=2$ und $Q(x)=k\,x^{q-1}$ $(q\neq 0)$ liegt die Differentialgleichung

$$y''(x)+[k\,x^{q-1}\,y(x)]'=f(x)$$

bzw.

$$y''(x)+k\,x^{q-1}\,y'(x)+k(q-1)\,x^{q-2}\,y(x)=f(x) \tag{25}$$

vor. Nach (24) lautet ihre Lösung

$$y(x)=D_1\,e^{-\frac{k}{q}x^q}+D_2\,e^{-\frac{k}{q}x^q}\int_{x_0}^{x}e^{\frac{k}{q}\xi^q}\,d\xi+e^{-\frac{k}{q}x^q}\int_{x_0}^{x}e^{\frac{k}{q}\xi^q}\left\{\int_{x_0}^{\xi}f(z)\,dz\right\}d\xi. \tag{26}$$

BEISPIEL 2. Ist speziell $P(x)=a_{n-1}x^{n-1}$, dann ergibt sich aus (1) vorerst

$$y^{(n)}(x)+[Q(x)\,y(x)]^{(n-1)}+\sum_{i=0}^{n-2}\left[\frac{(x^{n-1})^{(n-i-1)}}{x^{n-1}}Q(x)\,y(x)\right]^{(i)}=f(x).$$

Die hierin auftretende Summe bezeichnen wir mit $S_1$ und erhalten nach Ausführen der inneren Differentiation

$$S_1=\sum_{i=0}^{n-2}(n-1)\dots(i+1)\left[\frac{1}{x^{n-i-1}}\,Q\,y\right]^{(i)}$$

oder

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1)\dots(i+1) \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left[\frac{1}{x^{n-i-1}}\right]^{(i-j)} [Q\,y]^{(j)}.$$

Durch Abspalten der Glieder für $j=i$ und Vertauschen der Summationsreihenfolge ergibt sich

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-1)\dots(i-1)}{x^{n-i-1}} [Q\,y]^{(i)} + \sum_{j=0}^{n-3} \frac{1}{x^{n-j-1}} [Q\,y]^{(j)} \sum_{i=j+1}^{n-2} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \times$$
$$\times (n-1)\dots(i+1)(n-i-1)\dots(n-j-2).$$

Die innere Summe bezeichnen wir mit $S_2$ und verschieben den Summationsindex gemäß $i-j=\tau$, dann wird

$$S_2 = \sum_{\tau=1}^{n-j-2} (-1)^{\tau} \binom{\tau+j}{j} (n-1)\dots(\tau+j+1)(n-\tau-j-1)\dots(n-j-2).$$

Wegen

$$\binom{\tau+j}{j}(n-1)\dots(\tau+j+1)(n-\tau-j-1)\dots(n-j-2)$$
$$= (n-1)\dots(j+1)\binom{n-j-2}{\tau}$$

gilt

$$S_2 = (n-1)\dots(j+1)\left\{\sum_{\tau=0}^{n-j-2} (-1)^{\tau}\binom{n-j-2}{\tau} - 1\right\} = -(n-1)\dots(j+1).$$

Wir erhalten also

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-1)\dots(i+1)}{x^{n-i-1}} [Q\,y]^{(i)} - \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(n-1)\dots(j+1)}{x^{n-j-1}} [Q\,y]^{(j)} = \frac{n-1}{x} [Q\,y]^{(n-2)},$$

so daß jetzt (1) in

$$y^{(n)}(x) + [Q(x)\,y(x)]^{(n-1)} + \frac{n-1}{x} [Q(x)\,y(x)]^{(n-2)} = f(x) \tag{27}$$

übergeht. Als Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich aus (20) nach partieller Integration und Umbenennung der Konstanten

$$\left\{\begin{aligned} y(x) = {} & C_1 x^{n-1} e^{-\int_{x_0}^{x} Q(t)\,dt} + \sum_{i=2}^{n} C_i x^{n-1} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x}^{\xi} Q(t)\,dt} \frac{1}{\xi^{n-i+2}}\,d\xi + \\ & + x^{n-1} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x}^{\xi} Q(t)\,dt} \frac{1}{\xi^{n}} \left\{\int_{x_0}^{\xi} \frac{(\xi-z)^{n-2}}{(n-2)!} z f(z)\,dz\right\} d\xi. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Für $n=2$ und $Q(x)=k x^{q-1}$ $(q \neq 0)$ liegt jetzt die Differentialgleichung

$$y''(x) + [k x^{q-1} y(x)]' + \frac{1}{x} [k x^{q-1} y(x)] = f(x)$$

bzw.

$$y''(x) + k x^{q-1} y'(x) + k q x^{q-2} y(x) = f(x) \tag{29}$$

vor. Aus (28) erhalten wir die Lösung von (29) zu

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} y(x) &= D_1 x e^{-\frac{k}{q}x^q} + D_2 x e^{-\frac{k}{q}x^q} \int_{x_0}^{x} e^{\frac{k}{q}\xi^q} \frac{1}{\xi^2}\, d\xi + \\ &\quad + x e^{-\frac{k}{q}x^q} \int_{x_0}^{x} e^{\frac{k}{q}\xi^q} \frac{1}{\xi^2} \left\{ \int_{x_0}^{\xi} z f(z)\, dz \right\} d\xi . \end{aligned}\right.$$

Für die beiden Differentialgleichungen (25) und (29) wird von KAMKE [5] je eine partikuläre Lösung der homogenen Gleichung angegeben.

## Literatur

[1] KNESCHKE, A.: Wechselbeziehungen zwischen Differentialgleichungen und Integralgleichungen (1. u. 2. Mitteilung). Dtsch. Math. **5** (1941); **6** (1942).

[2] SCHOCH, M.: Überführung gewisser differentieller Randwertaufgaben in lineare Integralgleichungen. Dissertation, Freiberg 1959.

[3] SCHOCH, M., u. A. KNESCHKE: Verfahren zur Überführung gewisser differentieller Randwertprobleme in lineare Integralgleichungen. J. reine u. angew. Mathematik 203 (1960).

[4] SCHMEIDLER, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Bd. I. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1950.

[5] KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1956.

*Institut für Angewandte Mathematik der Bergakademie Freiberg (Sachsen)*

*(Eingegangen am 28. Juli 1960)*

Shah, S. M.
Math. Zeitschr. 75, 385—391 (1961)

# On Exceptional Values and the Genus of a meromorphic Function

By
S. M. Shah[1])

## 1. Introduction

Let $f(z)$ be a meromorphic function of integer order $\varrho$ and denote by $g(f)$ the genus of $f(z)$. R. Nevanlinna conjectured [2, p. 106] that if

$$g(f') < g(f) \tag{1.1}$$

then

$$\Delta(f) \equiv \Sigma\, \delta(a, f) = 2. \tag{1.2}$$

A. Edrei and S. M. Shah [1] constructed an entire function $f(z)$, with

$$\Delta(f) = 1, \tag{1.3}$$

to disprove this conjecture. We construct here a meromorphic function $f(z)$ for which (1.1) is true and

$$\Delta(f) = 0. \tag{1.4}$$

We also construct a class of functions for which Nevanlinna's conjecture holds and another class of functions for which it does not hold.

## 2. $G$-exceptional values

Let $(z_n(x))$ denote the zeros of $f(z) - x$. If (i) $f(z)$ is of divergence class order $\varrho$ and (ii) $\sum_1^\infty |z_n(x)|^{-\varrho} < \infty$ then $x$ is called a G exceptional value (e.v.). Further, by the factorization theorem

$$f(z) = z^k \exp\left(q(z)\right) \prod_1^\infty E\left(z/z_n(0), p_1\right) \Big/ \prod_1^\infty E\left(z/z_n(\infty), p_2\right), \tag{2.1}$$

where $q(z) = cz^\varrho + \cdots$ is a polynomial of degree $p_3 \leqq \varrho$, and $c = 0$ when $p_3 < \varrho$. The genus $g(f)$ is equal to $\max(p_1, p_2, p_3)$, and $\varrho - 1 \leqq g(f') \leqq g(f) \leqq \varrho$. If $g(f') < g(f)$ then $f(z)$ is zero type order $\varrho$ and divergence class. We shall denote by $D$ the class of meromorphic functions of zero type order $\varrho$ and divergence class, and by $E$ the class of functions for which (1.1) holds.

[1]) Sponsored by the United States Army under Contract No. DA-11-022-ORD-2059. Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin, Madison.

### 3. A Function with properties (1.1) and (1.4)

**Theorem 1.** *There exists a meromorphic function $f(z)\in E$ for which $\Delta(f)=0$.*

Proof. Let

$$x_1=10,\quad y_n=x_n^{n+1},\quad t_n=10\,y_n^{n+1},\quad x_{n+1}=\{(t_n)!\}!,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$\varphi(z)=g(z)/h(z),\quad g(z)=\prod_1^{\infty}(1-z/a_n),\quad h(z)=\prod_1^{\infty}(1+z/b_n)$$

where $a_n>0$, $b_n>0$, $n=1,2,\ldots$ and are given by the functions $n(x,1/g)$ and $n(x,1/h)$ defined below.

$$\begin{aligned}
n(x,1/g)&=0,\quad x<x_2\\
&=[x/\log^2 x],\quad x_n\leqq x<y_n\\
&=[y_n/\log^2 y_n],\quad y_n\leqq x<t_n\\
&=[x^{\frac{1}{2}}],\quad t_n\leqq x<x_{n+1},\quad n=2,3,\ldots\\
n(x,1/h)&=0,\quad x<t_2\\
&=[x^{\frac{1}{2}}],\quad t_{2n}\leqq x<(\log x_{2n+1})^2\equiv X_n\\
&=[X_n^{\frac{1}{2}}],\quad X_n\leqq x<t_{2n+1}\\
&=[x^{\frac{1}{2}}],\quad t_{2n+1}\leqq x<(\log x_{2n+2})^2\equiv Z_n\\
&=[Z_n^{\frac{1}{2}}],\quad Z_n\leqq x<t_{2n+2};\quad n=1,2,\ldots.
\end{aligned}$$

Then $g(z)$ and $h(z)$ are functions of order 1 and $\frac{1}{3}$ respectively. Further

$$\int_1^{\infty} r^{-2}\log M(r,g)\,dr>\tfrac{1}{2}\int_{x_n}^{y_n} dt/t\log t\to\infty$$

with $n$, and so $g$ and $\varphi$ belong to the class of divergence order 1. Further [6, pp. 80–83] in the range (3.1)

$$\exp\{(\log t_n)^2\}\leqq r\leqq\log x_{n+1},\tag{3.1}$$

$$T(r,g)\sim 4r^{\frac{1}{2}};$$

and in the range (3.2)

$$\exp\{(\log t_{2n})^2\}\leqq r\leqq\log x_{2n+1},\tag{3.2}$$

$$T(r,h)\sim 5r^{\frac{1}{2}};\quad T(r,\varphi)\sim T(r,g)\sim N(r,1/\varphi).$$

In the range (3.3)

$$\exp\{(\log t_{2n+1})^2\}\leqq r\leqq\log x_{2n+2},\tag{3.3}$$

$$T(r,\varphi)\sim T(r,h)\sim 3r^{\frac{1}{2}}\sim N(r,\varphi).$$

Hence $\delta(0,\varphi)=\delta(\infty,\varphi)=0$. Further $\varphi(z)$ has 0 and $\infty$ as G e.v. and belongs to the class of divergence and so it cannot have any $N$ e.v., and $\Delta(\varphi)=0$. Let

$$F(z)=\varphi(z^{\varrho}),\quad f(z)=F(z)+a,\quad a\neq 0.$$

Then $F(z)$ is a meromorphic function of order $\varrho$ zero type, divergence class and $g(F')=g(F)=\varrho-1$, $\Delta(F)=0$. Hence $f(z)\in E$ and $\Delta(f)=0$.

### 4. Functions with properties (1.1) and (1.2)

Let $f(z) \in D$. Then $N(r) = N(r, 1/f) + N(r, f)$ is of order $\varrho$ and $N(r) = o(r^{\varrho})$. Denote by $\varrho(r)$ a proximate order of $N(r)$ [3; 4, p. 448]. If in (2.1), $p_1 = p_2 = \varrho$ then we can prove that

$$T(r, f) = \frac{r^{\varrho}}{\varrho \pi} \left| c\,\varrho + \sum_{|a_n| \leqq r} a_n^{-\varrho} - \sum_{|b_n| \leqq r} b_n^{-\varrho} \right| + O(r^{\varrho(r)}), \tag{4.1}$$

where $z_n(0) = a_n$, $z_n(\infty) = b_n$ and $c = 0$ if $p_3 < \varrho$.

If $\min(p_1, p_2) < \varrho$ then we obtain similarly

$$T(r, f) = \frac{r^{\varrho}}{\varrho \pi} \left| \sum_{|a_n| > r} a_n^{-\varrho} - \sum_{|b_n| > r} b_n^{-\varrho} \right| + O(r^{\varrho(r)}), \tag{4.2}$$

where the terms involving $b_n$ disappear, if $f$ has no poles.

Suppose now that $f(z)$ satisfies the conditions

$$\max(p_1, p_2) = \varrho - 1, \tag{4.3}$$

$$\lim_{r \to \infty} r^{\varrho - \varrho(r)} \left| \sum_{|a_n| > r} a_n^{-\varrho} - \sum_{|b_n| > r} b_n^{-\varrho} \right| = \infty; \tag{4.4}$$

then from (4.2) and (4.4) we have $\delta(0, f) = \delta(\infty, f) = 1$. If we write $h(z) = f(z) + a$, $a \neq 0$, then

$$g(h') < g(h), \quad \Delta(h) = 2.$$

**Example.** Let [2, pp. 18–19]

$$f(z) = \prod_{2}^{\infty} E(z/a_n, \varrho - 1), \quad a_n = -\{n (\log n)^{\alpha}\}^{1/\varrho}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Then for $f(z) + a$, $a \neq 0$, NEVANLINNA's conjecture holds.

### 5. Functions with properties (1.1) and (1.3)

Let $f(z) \in D$ and satisfy the conditions (4.3), (5.1):

$$\delta(0, f) = 0. \tag{5.1}$$

Let $h(z) = f(z) + a$, $a \neq 0$. Then since $f(z)$ has 0 and $\infty$ as G e.v. it cannot have any $N$ e.v. other than $\infty$. Hence

$$g(h') < g(h), \quad \Delta(h) \leqq 1. \tag{5.2}$$

If we now take $f(z)$ to be an entire function or a meromorphic function with $N(r, f)$ of sufficiently slow growth, then for $h(z) = f(z) + a$, we will have (5.2) with equality sign in the last relation of (5.2).

### 6. Functions with no finite G e.v.

If $f(z) \in D$ and $g(f + a) = \varrho$ for every (finite) $a$, then is it true that $g(f') = \varrho$? This question was raised by G. VALIRON [5, p. 443]. We give here an entire function $f(z)$ of order 2 satisfying the above hypothesis and such that $g(f') < 2$.

We also give a function $F(z) \in D$ such that $F(z)$ and $F'(z)$ have no G e.v. and $\Delta(F) = 2$.

(i) Let[2])

$$f'(z) = \prod_{2}^{\infty} \{1 + z^2/n(\log n)^{\alpha}\}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Then $g(f') = 1$, $\varrho = 2$, $f'(z) \in D$ and it can be shown by considering the behaviour of $f'(z)$ and $f(z) + a$ in sectors

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

that $g(f + a) = 2$ for every $a$.

(ii) We require two lemmas.

**Lemma 1[3]).** *If $\theta_1, \theta_2, \ldots$ denote given real numbers such that for each $i$, $|\theta_i| \leqq 1$, then it is possible to choose $\varepsilon_k = 1$ or $-1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ such that for each positive integer $n$,*

$$-2 \leqq \sum_{1}^{n} \varepsilon_k - \sum_{1}^{n} \theta_k \leqq 2. \tag{6.1}$$

Proof. Choose $\varepsilon_1 = 1$. Then $-2 \leq \varepsilon_1 - \theta_1 \leqq 2$. Let $m$ be a positive integer. Assume that we have chosen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ each equal to 1 or $-1$ in such a way that (6.1) holds for $n = 1, 2, \ldots, m-1$. Now we choose $\varepsilon_m$ equal to 1 or $-1$ in such a way that (6.1) holds also for $n = m$. Write

$$S_n = \sum_{1}^{n} \varepsilon_k - \sum_{1}^{n} \theta_k.$$

According to (6.1) applied with $n = m - 1$, we have

$$-2 \leqq S_{m-1} \leqq 2.$$

If $0 \leqq S_{m-1} \leqq 2$, then we choose $\varepsilon_m = -1$ so that

$$S_m = S_{m-1} - 1 - \theta_m \leqq 2 - 1 - \theta_m \leqq 2,$$
$$S_m \geqq 0 - 1 - \theta_m \geqq -2.$$

On the other hand if $-2 \leqq S_{m-1} < 0$, then we choose $\varepsilon_m = 1$ so that

$$S_m = S_{m-1} + 1 - \theta_m < 0 + 1 - \theta_m \leqq 2,$$
$$S_m \geqq -2 + 1 - \theta_m \geqq -2.$$

This completes the proof.

**Lemma 2.** *Given a positive integer $\varrho$, there exists a non-absolutely convergent series $\sum_{1}^{\infty} a_n^{-\varrho}$ such that $0 < |a_1| < |a_2| < \cdots$, and such that if $n(x, a)$ denotes the number of $a_n$ with $|a_n| \leqq x$ and*

$$N(x, a) = \int_{0}^{x} \{n(t, a)/t\}\, dt,$$

[2]) I am thankful to Dr. E. F. COLLINGWOOD for this counter-example. We omit the details of proof.

[3]) I am thankful to Prof. J. G. VAN DER CORPUT for this lemma.

*then*

$$n(r,a)=o(r^{\varrho});\quad \lim_{r\to\infty} r^{\varrho-\varrho(r)}\Big|\sum_{|a_n|>r} a_n^{-\varrho}\Big|=\infty.$$

*Here $\varrho(r)$ is a proximate order of $N(r,a)$.*

Proof. Take

$$|a_n|^{\varrho}=n\log(n+a),\quad 0<a\leqq 1.$$

In Lemma 1, take

$$\theta(n)=\frac{n}{\{\log(n+b)\}^{\alpha}}-\frac{(n-1)}{\{\log(n-1+b)\}^{\alpha}},\ 0<\alpha<1,\ b=100,\ n=1,2,\ldots.$$

Then

$$S^{*}(n)=\sum_{1}^{n}\varepsilon_k=n/\{\log(n+b)\}^{\alpha}+K(n),$$

where $-2\leqq K(n)\leqq 2$. We take $a_n$ such that

$$a_n^{\varrho}=\{n\log(n+a)\}\,\varepsilon_n,\quad n=1,2,\ldots.$$

It is easily seen, by partial summation, that $\sum a_n^{-\varrho}$ is convergent. Let $p$ denote the least non-negative integer such that $\sum |a_n|^{-1-p}$ is convergent. Then $p=\varrho$. Further

$$\sum_{M}^{\infty}\varepsilon_n/n\log(n+a)=\{1+o(1)\}/\alpha(\log M)^{\alpha}.$$

Now $n(r,a)=n$, if $|a_n|=r_n\leqq r<r_{n+1}$. Hence

$$n(r,a)\sim r^{\varrho}/(\varrho\log r),\quad N(r,a)\sim r^{\varrho}/(\varrho^2\log r)\sim r^{\varrho(r)}.$$

If $r_{M-1}\leqq r<r_M$, then

$$\sum_{|a_n|>r} a_n^{-\varrho}=\sum_{M}^{\infty}\varepsilon_n/n\log(n+a)=\{1+o(1)\}/\alpha\,\varrho^{\alpha}(\log r)^{\alpha}.$$

Hence

$$\lim_{r\to\infty} r^{\varrho-\varrho(r)}\sum_{|a_n|>r} a_n^{-\varrho}=\infty.$$

**Corollary.** *Given a positive integer $\varrho$ and*

$$|a_n|^{\varrho}=n\log(n+1),\quad |b_n|^{\varrho}=n\log(n+\tfrac{1}{2}),$$

*we can choose $\varepsilon_n$ such that*

$$\sum_{1}^{\infty} a_n^{-\varrho}=\sum_{1}^{\infty}\varepsilon_n/n\log(n+1),\quad (\arg a_n=0\ \text{or}\ \pi/\varrho)$$

$$\sum_{1}^{\infty} b_n^{-\varrho}=\sum_{1}^{\infty}(-\varepsilon_n)/n\log(n+\tfrac{1}{2}),\quad (\arg b_n=\pi/\varrho\ \text{or}\ 0)$$

*are both convergent. Further $(a_n^{\varrho}/b_n^{\varrho})$ is real and negative for $n=1,2,\ldots$ and*

$$\sum_{|a_n|>r} a_n^{-\varrho}=\frac{1+o(1)}{\alpha(\varrho\log r)^{\alpha}};\quad \sum_{|b_n|>r} b_n^{-\varrho}=-\frac{1+o(1)}{\alpha(\varrho\log r)^{\alpha}}.$$

*Further if $n(r, b)$ denotes the number of $b_n$ with $|b_n| \leqq r$, and*

$$N(r) = \int_0^r \{n(r, a) + n(r, b)\}\, dr/r,$$

*then*

$$N(r) \sim 2r^{\varrho}/\varrho^2 (\log r) \sim r^{\varrho(r)}, \tag{6.2}$$

*where $\varrho(r)$ is a proximate order for $N(r)$.*

Now consider the function

$$f(z) = \exp(c z^{\varrho}) \prod_1^{\infty} E(z/a_n, \varrho) \Big/ \prod_1^{\infty} E(z/b_n, \varrho) \tag{6.3}$$

where $a_n$ and $b_n$ have been defined in the above corollary and

$$\varrho\, c = -\left\{\sum_1^{\infty} a_n^{-\varrho} - \sum_1^{\infty} b_n^{-\varrho}\right\}.$$

Then $f(z) \in D$. Further

$$\left| c\,\varrho + \sum_{|a_n| \leqq r} a_n^{-\varrho} - \sum_{|b_n| \leqq r} b_n^{-\varrho} \right| \sim 2/\{\alpha (\varrho \log r)^{\alpha}\}, \tag{6.4}$$

and so

$$T(r, f) \sim 2r^{\varrho}/\{\alpha \pi \varrho^{1+\alpha} (\log r)^{\alpha}\}.$$

Hence $\delta(0, f) = \delta(\infty, f) = 1$ and so $f(z)$ has no G e.v. Let $F(z) = (f(z))^2$. Then $F(z) \in D$ and $\delta(0, F) = \delta(\infty, F) = 1$. $F(z)$ has no G e.v. and $\delta(0, F') = \delta(\infty, F') = 1$ [7, p. 67] and so $F'(z)$ has no G e.v.

## 7. Remarks

Let $f(z) \in D$.

(i) If $f(z)$ has $\infty$ as G e.v., then with the help of NEVANLINNA'S second theorem we can show that

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f) \leqq 1, \quad \sum_{a \neq \infty} \delta(a, f') \leqq 1.$$

If $f(z)$ has $\alpha$ as G e.v., then

$$\sum_{a \neq \alpha} \delta(a, f) \leqq 1.$$

(ii) If $f(z)$ has two G e.v. $a$ and $b$ $(|a| \leqq |b|)$, then $f(z) \in E$ if and only if $a \neq 0, \neq \infty$, $b = \infty$.

(iii) If $f(z)$ has no G e.v. or one finite G e.v., then $f(z) \notin E$.

(iv) If $f(z) \in E$ and either $\Delta(f) = 2$ or $\Delta(f') = 2$, then $\delta(\infty, f) = 1$.

For $\infty$ is G e.v. of $f'(z)$ and so it is G e.v. of $f(z)$. If $\Delta(f) = 2$, then from (i) we have $\delta(\infty, f) = 1$. If $\Delta(f') = 2$ then since 0 and $\infty$ are G e.v. of $f'(z)$, $\delta(0, f') = \delta(\infty, f') = 1$. Further

$$N(r, f) \leqq N(r, f'), \quad T(r, f') < 2\,T(r, f) + O(\log r).$$

Hence $\delta(\infty, f) = 1$.

*Added in proof.* For the proof of (4.1) see S. M. SHAH, An extension of LINDELOF'S theorem to Meromorphic Functions, Tohoku Math. J. (2) **12**, 333–338 (1960).

In (4.4) the function $\varrho(r)$ is the same as that in (4.2).

## References

[1] Edrei, Albert, and S. M. Shah: A Conjecture of R. Nevanlinna concerning the genus of a meromorphic function. Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 319—324 (1960).

[2] Nevanlinna, R.: Le Theoreme de Picard-Borel et la theorie des fonctions Meromorphes. Paris 1929.

[3] Shah, S. M.: On Proximate orders of Integral Functions. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 326—328 (1946).

[4] Shah, S. M., and S. K. Singh: Meromorphic Functions with maximum defect sum. Tohoku Math. J. (2) **11**, 447—452 (1959).

[5] Valiron, G.: Le Theoreme de Laguerre-Borel dans la theorie des fonctions Entieres. Bull. des Sc. Math. **46**, 432—445 (1922).

[6] Valiron, G.: Remarques sur les Valeurs Exceptionelles des Fonctions Meromorphes. Rend. Circ. Mat. Palermo **57**, 71—86 (1933).

[7] Wittich, H.: Defekte Werte eindeutiger analytischer Funktionen. Arch. der Math. **9**, 65—74 (1958).

*Dept. of Math., Northwestern University, Evanston, Illinois (U.S.A.)*

*(Eingegangen am 28. Juli 1960)*

Tschauner, J.
Math. Zeitschr. 75, 392–394 (1961)

# Erzeugende Funktionen von Besselschen Funktionen

Von

Johann Tschauner

Durch Transformation ihrer Rekursionsformeln werden erzeugende Funktionen von Besselschen Funktionen beliebiger Art mit beliebigem Index hergeleitet, von denen Sonderfälle oder andere Formen — z. T. schon sehr lange — in der Literatur bekannt sind. Eine dieser erzeugenden Funktionen wird zur Darstellung von Besselschen Funktionen 1. Art mit mehreren Argumenten benützt.

*Die erzeugende Funktion der $Z_{p+n}(x) : n!$*

Aus der bekannten Rekursionsformel [2] der Besselschen Funktionen

$$x u_{n+2} - 2(n+1+p)\, u_{n+1} + x u_n = 0, \qquad u_n(x,p) = Z_{p+n}(x),$$

folgt bei $n \geqq 0$ die Rekursionsformel für die Funktionen $v_n(x,p) = Z_{p+n}(x) : n!$

$$x(n+2)(n+1)\, v_{n+2} - 2(n+1)(n+1+p)\, v_{n+1} + x v_n = 0. \tag{1}$$

Durch Transformation dieser Gleichung [5]

$$x \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, v_{n+2} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+1+p)\, v_{n+1} t^n + x \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n = 0$$

erhält man für die erzeugende Funktion $V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$ der Funktionen $v_n$ die homogene, von Anfangswerten $v_0$ usw. unabhängige Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(x - 2t)\, \ddot{V} - 2(1+p)\, \dot{V} + x V = 0, \qquad \dot{V} = dV/dt. \tag{2}$$

Dies ist mit $s = \frac{1}{4}(x^2 - 2xt)$, $ds = -\frac{x}{2} dt$ eine mit der Besselschen Differentialgleichung verwandte einparametrige Gleichung

$$s V'' + (1+p) V' + V = 0, \qquad V' = dV/ds$$

mit der Lösung $s^{-\frac{p}{2}} Z_p(2\sqrt{s})$. Die mit der Anfangsbedingung (bei $t = 0$) $V(0) = v_0 = Z_p(x)$ verträgliche Lösung von (2) ist daher gleich

$$V(t) = A\left[\tfrac{1}{4}(x^2 - 2xt)\right]^{-\frac{p}{2}} \cdot Z_p\left(\sqrt{x^2 - 2xt}\right).$$

Der Normierungsfaktor $A$ erhält aus der Anfangsbedingung den Wert $A = (\frac{1}{2}x)^p$. Man findet also die erzeugende Funktion der $Z_{p+n}(x) : n!$

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_{p+n}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{x}{x-2t}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot Z_p\left(\sqrt{x^2 - 2xt}\right). \tag{3}$$

Sie gilt offenbar für alle Arten von Besselschen Funktionen, da die zuständige Differentialgleichung (2), welche durch Transformation der für alle Arten von Besselschen Funktionen gültigen Rekursionsformel (1) gewonnen wurde, von jeglichen Anfangswerten unabhängig ist.

*Die erzeugende Funktion der $Z_{p-n}(x):n!$*

In analoger Weise erhält man durch Transformation der für die Funktionen $w_n(x, p) = Z_{p-n}(x):n!$ gültigen Rekursionsformel

$$x(n+2)(n+1)\,w_{n+2} + 2(n+1)(n+1-p)\,w_{n+1} + x\,w_n = 0 \tag{4}$$

eine homogene Differentialgleichung für ihre erzeugende Funktion

$$(x+2t)\,\ddot{W} + 2(1-p)\,\dot{W} + x\,W = 0. \tag{5}$$

Ihre Lösung ist $W(t) = B\left[\frac{1}{4}(x^2+2xt)\right]^{\frac{p}{2}} \cdot Z_p\left(\sqrt{x^2+2xt}\right)$. Da der Faktor $B$ aus der Anfangsbedingung $W(0) = w_0 = Z_p(x)$ sich zu $B = (x/2)^{-p}$ ergibt, findet man die erzeugende Funktion der $Z_{p-n}(x):n!$

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_{p-n}(x)\,\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{x+2t}{x}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot Z_p\left(\sqrt{x^2+2xt}\right). \tag{6}$$

Auch sie gilt für alle Arten von Besselschen Funktionen.

*Sonderfälle und andere Formen von (3) und (6)*

Der Sonderfall von (3) bei $p=0$ und $Z_n = J_n$ ist in [3], [4] angegeben. Die Beziehungen (3), (6) sind für $Z_{p+n} = J_{p+n}$ bzw. $Z_{p-n} = J_{p-n}$ im wesentlichen schon in Ergebnissen enthalten, die auf Bessel und Lommel [1] zurückgehen. Eine Erweiterung dieser Ergebnisse auf Besselsche Funktionen beliebiger Art findet sich in [2]. Auf (3) beruht auch mit $x^2 - 2xt = a^2x^2$ das sogenannte Multiplikationstheorem der Besselschen Funktionen

$$Z_p(a\,x) = a^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{p+n}(x)}{n!}(1-a^2)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n. \tag{7}$$

Ersetzt man in (3) $x$ durch $2\sqrt{x}$, $t$ durch $-t:\sqrt{x}$ und in (6) $x$ durch $2\sqrt{x}$, $t$ durch $t:\sqrt{x}$, dann entstehen die Beziehungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{p+n}(2\sqrt{x})}{n!}\,x^{-\frac{n+p}{2}}(-t)^n = (x+t)^{-\frac{p}{2}} \cdot Z_p\left(2\sqrt{x+t}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{p-n}(2\sqrt{x})}{n!}\,x^{-\frac{n-p}{2}}\,t^n = (x+t)^{\frac{p}{2}} \cdot Z_p\left(2\sqrt{x+t}\right).$$

Die in [4] S. 261 angegebenen Gln. (2), (3) enthalten daher einen Druckfehler. Statt $J_{\alpha+n}(x)$ bzw. $J_{\alpha-n}(x)$ lies $J_{\alpha+n}(2\sqrt{x})$ bzw. $J_{\alpha-n}(2\sqrt{x})$. Schreibt man in (3) $-t$ anstelle von $t$, so ergibt sich nach einem Vergleich mit (6) die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{p-n}(x)}{n!}\,t^n = \left(1+\frac{2}{x}t\right)^p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{p+n}(x)}{n!}(-t)^n.$$

Durch Entwicklung des ersten rechten Faktors in eine Binomialreihe erhält man die Darstellung von $Z_{p-n}(x)$ in Form einer endlichen Summe von Besselschen Funktionen mit positiven Indizes

$$(8) \qquad Z_{p-n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{p}{m} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \frac{(-1)^{n-m}\, n!}{(n-m)!}\, Z_{p+n-m}(x).$$

Für $p=0$ entsteht aus (8) die bekannte Formel $Z_{-n}(x) = (-1)^n \cdot Z_n(x)$ [2].

*Darstellung von Besselschen Funktionen mit mehreren Argumenten*

Ersetzt man in der bekannten Potenzreihenentwicklung der Besselschen Funktionen 1. Art [2]

$$(9) \qquad \left(\frac{s}{2}\right)^{-p} \cdot J_p(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{s}{2}\right)^{2m}}{m!\, \Gamma(1+p+m)}.$$

$p$ durch $p+n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), multipliziert mit $(-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} : n!$ und summiert über alle $n$, dann entsteht die Beziehung

$$\left(\frac{s}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_{p+n}(s)}{n!} \left(-\frac{t^2}{2s}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-1)^n \left(\frac{s}{2}\right)^{2m} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{m!\, n!\, \Gamma(1+p+m+n)}.$$

Da sich ihre linke Seite nach (3) mit $s$ anstelle von $x$ und mit $-t^2 : 2s$ anstelle von $t$ explizit berechnen läßt, findet man die in beiden Argumenten $s$ und $t$ symmetrische Darstellung der Besselschen Funktion

$$(10) \qquad \left(\frac{\sqrt{s^2+t^2}}{2}\right)^{-p} \cdot J_p\left(\sqrt{s^2+t^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-1)^n \left(\frac{s}{2}\right)^{2m} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{m!\, n!\, \Gamma(1+p+m+n)}$$

als Doppelsumme. Offenbar darf man das gezeigte Verfahren beliebig oft wiederholen. Man erhält im Ergebnis die Darstellung der Besselschen Funktion 1. Art mit $k$ gleichberechtigten Argumenten

$$(11) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}}{2}\right)^{-p} J_p\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}\right) \\ \quad = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1} \cdots (-1)^{m_k} \left(\frac{x_1}{2}\right)^{2m_1} \cdots \left(\frac{x_k}{2}\right)^{2m_k}}{m_1! \ldots m_k!\, \Gamma(1+p+m_1+\cdots+m_k)} \end{cases}$$

als $k$-fache Summe.

## Literatur


[1] LOMMEL, E. v.: Studien über die Besselschen Funktionen, S. 11. Leipzig 1868.

[2] WATSON, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel functions, S. 40, 82 u. 140—142. Cambridge 1922.

[3] TRUESDELL, C. A.: An essay toward a unified theory of special functions, S. 83. Princeton 1948.

[4] ERDÉLYI, A.: Higher transcendental functions, Bd. 3, S. 261. New-York-Toronto-London 1955.

[5] TSCHAUNER, J.: Über einen Zusammenhang zwischen den Kugelfunktionen und Zylinderfunktionen. Math. Z. **73**, 457—459 (1960). — Zur Erzeugung der Gegenbauerschen Polynome. Math. Z. **75**, 1—2 (1961).


*Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e.V. Oberpfaffenhofen, Post Weßling, Oberbayern*

*(Eingegangen am 14. Juli 1960)*

# Ingenieur-Mathematik

Von Dr. Robert Sauer,
Professor an der Technischen Hochschule München

Zweiter Band

## Differentialgleichungen und Funktionentheorie

Mit 95 Abbildungen. XII, 180 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 18,—

ZUR INFORMATION

Der Inhalt des hier vorliegenden zweiten Bandes der „Ingenieur-Mathematik" umfaßt Vektoranalysis, gewöhnliche Differentialgleichungen, Fourier-Reihen, Funktionentheorie. Er entspricht also etwa dem Stoff, der in den Kursvorlesungen der Technischen Hochschulen im dritten und vierten Semester für die Studierenden der Ingenieurwissenschaften und der Physik gebracht wird. Wiederum wird versucht, durch geometrische und physikalische Veranschaulichung das Verständnis zu erleichtern und das Interesse anzuregen. Diesem Ziel dient insbesondere die eingehende Erörterung von Anwendungen in der Strömungslehre und Elektrostatik. Im Abschnitt über Differentialgleichungen wird auf lineare Schwingungsprobleme, im Abschnitt über Funktionentheorie auf konforme Abbildungen und die Auswertung komplexer Integrale ausführlich eingegangen. Einfachste Beispiele liefern Ausblicke auf die Theorie der Rand- und Eigenwertprobleme und auf das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen. Numerische Methoden nehmen wie im ersten Band einen verhältnismäßig breiten Raum ein.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

*Vor kurzem erschien:*

# Die innere Geometrie der metrischen Räume

Von Dr. Willi Rinow,
Professor an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 105)

XVI, 520 Seiten Gr.-8°. 1961. DM 79,—; Ganzleinen DM 83,—

ZUR INFORMATION

Die innere Geometrie einer Fläche ist von C. F. Gauss begründet worden und hat sich im Laufe des 19. Jahrhunderts zur Geometrie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten ausgeweitet. Seit den klassischen Untersuchungen von J. Hadamard über Flächen konstanter negativer Krümmung hat sich die Erkenntnis immer mehr durchgesetzt, daß ein großer Teil der Methoden, insbesondere diejenigen, welche in der Differentialgeometrie im großen entwickelt worden sind, nur die topologische und metrische Struktur der Räume, nicht aber ihre Differenzierbarkeitsstruktur benötigen.
Das vorliegende Buch gibt einen systematischen Aufbau dieser von Differenzierbarkeitsvoraussetzungen freien inneren Geometrie, fundiert auf den Begriff des metrischen Raumes. Eine Vollständigkeit in der Darstellung der Ergebnisse dieser Theorie wird aus Rücksicht auf den Umfang des Buches nicht angestrebt. Dagegen wird darauf Wert gelegt, die voneinander abweichenden Definitionen und Voraussetzungen, die von den verschiedensten Autoren gegeben worden sind, untereinander zu vergleichen und zu vereinheitlichen. Um der Darstellung einen möglichst selbständigen Charakter zu geben, werden die topologischen Hilfsmittel, von denen die innere Geometrie einen ausgiebigen Gebrauch macht, ausführlich behandelt.

**SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany